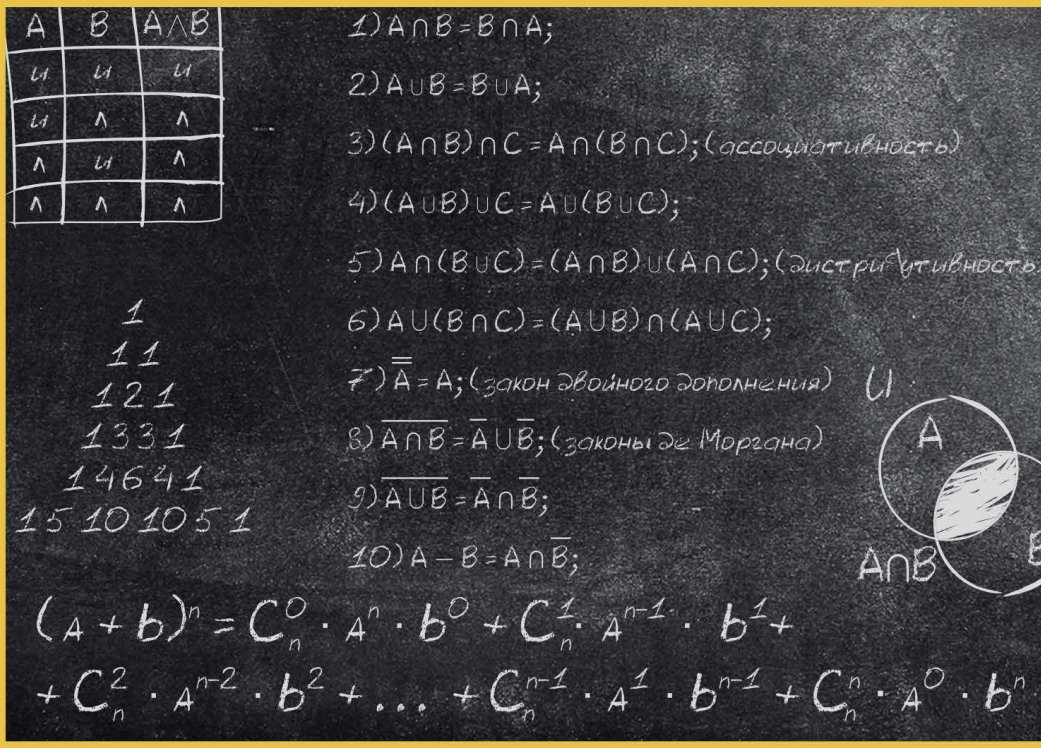
Вводный курс математики



МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Алтайский государственный педагогический университет»
(ФГБОУ ВО «АлтГПУ»)

ВВОДНЫЙ КУРС МАТЕМАТИКИ

Учебное пособие

Барнаул
ФГБОУ ВО «АлтГПУ»
2022

Об издании - 1, 2, 3.

ISBN 978-5-907487-31-4

УДК 51(075)
ББК 22.1я73
В244

Авторы: Исаев И. М., Кислицин А. В., Моторинский Ю. А., Пайсон Б. Д.

Вводный курс математики : учебное пособие / И. М. Исаев, А. В. Кислицин, Ю. А. Моторинский, Б. Д. Пайсон. – Барнаул : АлтГПУ, 2022. – Текст (визуальный) : электронный. – Систем. требования: PC не ниже класса Intel Celeron 2 ГГц ; 512 Mb RAM ; Windows XP/Vista/7/8/10 ; Adobe Acrobat Reader ; SVGA монитор с разрешением 1024x768 ; мышь.

ISBN 978-5-907487-31-4

Рецензенты:

Веряев А. А., доктор педагогических наук, профессор (Алтайский государственный педагогический университет);

Журавлев Е. В., кандидат физико-математических наук, доцент (Алтайский государственный университет);

Тыщенко О. А., кандидат педагогических наук, доцент (Алтайский государственный педагогический университет).

В пособии излагается материал, усвоение которого будет способствовать более качественному изучению основных математических дисциплин в вузе. Издание содержит теоретический материал, набор упражнений, а также индивидуальные задания для организации самостоятельной работы студентов.

Данное учебное пособие предназначено для студентов математических специальностей педагогических вузов.

Рекомендовано к изданию редакционно-издательским советом АлтГПУ 30.06.2022 г.

Текст (визуальный) : электронный

Системные требования:

PC не ниже класса Intel Celeron 2 ГГц ; 512 Mb RAM ; Windows XP/Vista/7/8/10 ; Adobe Acrobat Reader ; SVGA монитор с разрешением 1024x768 ; мышь.

Об издании - 1, 2, 3.

Электронное издание создано при использовании программного обеспечения Sunrav BookOffice.

Объём издания – 1 300 КБ.

Дата подписания к использованию: 13.12.2022

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Алтайский государственный педагогический университет» (ФГБОУ ВО «АлтГПУ»)

ул. Молодежная, 55, г. Барнаул, 656031
Тел. (385-2) 36-82-71, факс (385-2) 24-18-72
e-mail: rector@altspu.ru, http://www.altspu.ru

Об издании - 1, 2, 3.

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ 5
СПИСОК ОБОЗНАЧЕНИЙ 6
ГЛАВА 1. Элементы математической логики и теории множеств 7
ГЛАВА 2. Индукция и комбинаторика 35
ГЛАВА 3. Отображения и бинарные отношения 49
ИНДИВИДУАЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ № 1. Элементы математической логики 64
ИНДИВИДУАЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ № 2. Множества, отношения, отображения множеств 87
ИНДИВИДУАЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ № 3. Метод математической индукции 108
ИНДИВИДУАЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ № 4. Комплексные числа 116
ЗАКЛЮЧЕНИЕ 126
Список использованной литературы 127

Введение

За основу данного учебного пособия взято пособие «Вводный курс математики» Ю. А. Моторинского, Б. Д. Пайсона, а также книга А. И. Кострикина «Введение в алгебру». Практическая часть составлена с использованием сборника индивидуальных заданий, который много лет применялся авторами при обучении студентов. Пособие предназначено для студентов педагогических вузов математических и инженерных специальностей.

В пособии излагается общематематический и общелогический материал, усвоение которого будет способствовать более качественному изучению основных математических дисциплин в вузе. Так, элементы логики и теории множеств фактически составляют язык, который используется в любом разделе математики при формулировке математических предложений, доказательстве теорем и т. п. Бинарное отношение также является общим математическим понятием, позволяющим уточнить интуитивные представления об имеющихся связях между различными объектами: сходство, порядок и т. п.

Кроме того, пособие знакомит читателя с методом математической индукции и некоторыми элементами комбинаторики.

Пособие содержит теоретический материал и набор упражнений в виде индивидуальных заданий, достаточные для усвоения указанных вопросов и формирования необходимых навыков.

На протяжении всего текста используется элементарная теоретико-множественная символика, известная из курса средней школы.

Список обозначений

$\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел;

$\mathbb{Z}$ — множество целых чисел;

$\mathbb{Q}$ — множество рациональных чисел;

$\mathbb{R}$ — множество действительных чисел;

$\mathbb{R}^+$ — множество положительных действительных чисел;

$a \,\vdots\, b$ — a делится нацело на b;

$\overset{df}{\Leftrightarrow}$ — равносильно по определению;

$\overset{df}{=}$ — равно по определению;

$\blacksquare$ — окончание доказательства теоремы.

ГЛАВА 1
Элементы математической логики и теории множеств

§ 1. Высказывания и предикаты. Кванторы

1. ***Высказывания и предикаты.*** В математике основными являются два вида предложений: высказывания и предикаты.

Высказывание *— это повествовательное предложение, о котором можно сказать, истинно оно или ложно.*

Например, предложение «Все натуральные числа положительны» — истинное высказывание; предложение «Река Обь впадает в Каспийское море» — ложное высказывание.

Предполагается, что высказывания подчиняются двум законам:

1. Закон противоречия. Никакое высказывание не может одновременно быть истинным и ложным.

2. Закон исключённого третьего. Всякое высказывание либо истинно, либо ложно («третьего не дано»).

Высказывания принято обозначать буквами: A, B, C, $\ldots$. Если высказывание A истинно, то будем записывать: $[A] = и$; если высказывание B ложно, то запишем: $[B] = л$.

Например, $[\sin -\text{нечётная функция}] = и$; $[\log_2 16 = -4] = л$.

Верные числовые равенства и неравенства — это истинные высказывания; неверные числовые равенства и неравенства — это ложные высказывания.

Примером предиката может служить предложение «x — чётное число». Оно не является высказыванием, так как о нем нельзя сказать, истинно оно или ложно. Истинность этого предложения зависит от значения переменной x. Если вместо x подставить, например, натуральное число 4, то получим истинное высказывание; если же переменной x придать значение, равное 27, то получим ложное высказывание.

Предикатом **(*или высказывательной формой*)** *называют предложение с переменными, которое становится высказыванием, если вместо переменных подставить их значения из некоторого множества.*

Примерами предикатов являются уравнения и неравенства с переменными.

В зависимости от числа переменных различают одноместные, двуместные и т. д. предикаты. Обозначения: $P(x)$, $Q(x;\, y)$, $\ldots$.

Например, пусть $P(x)$ обозначает предикат $x > 3$ на множестве $\mathbb{N}$. Тогда $P(1)$ — высказывание $1 > 3$, т. е. $[P(1)] = л$, $[P(5)] = и$.

Уравнение $y = -2x^2$ (здесь $x,\, y \in \mathbb{R}$) — двуместный предикат. Обозначим его через $Q(x;\, y)$. В этом случае $[Q(-2,5;\, -12,5)] = и$, $[Q(2;\, 8)] = л$.

2. *Кванторы. Доказательство и опровержение общих и частных утверждений.* В математике часто приходится не только доказывать, но и опровергать различные утверждения (доказывать их ложность). Наиболее важными видами из них являются общие и частные утверждения.

Общие утверждения формулируются с помощью словосочетаний: «*для любого...*», «*для всех...*», «*для каждого...*»; частные утверждения — «*существует такой...*», «*хотя бы для одного...*».

В логике словосочетание «*для любого*» принято обозначать с помощью знака $\forall$, а «*существует такой...*» — с помощью знака $\exists$.

Рассмотрим общее утверждение «Для любого действительного числа x верно неравенство $2x - 3 > 0$». Его можно с помощью введенного символа записать как $(\forall x \in \mathbb{R})(2x - 3 > 0)$. Символ $\forall$ называется ***квантором общности***. Запись $\forall x$ читается «для любого x».

Частное утверждение «Существует действительное число x такое, что верно неравенство $2x - 3 > 0$» записывают с помощью ***квантора существования*** $\exists$. Запись при помощи квантора существования выглядит так: $(\exists x \in \mathbb{R})(2x - 3 > 0)$. Фраза «существует x такой, что...» обозначается $\exists x$.

Предложения $(\forall x \in \mathbb{R})(2x - 3 > 0)$ и $(\exists x \in \mathbb{R})(2x - 3 > 0)$ являются высказываниями. Первое из них ложно, второе предложение истинно.

В общем случае истинность общих и частных утверждений определяется по следующим правилам: пусть $P(x)$ — предикат, где $x \in M$.

Высказывание $(\forall x)P(x)$ считается истинным, если $P(x)$ истинно при подстановке вместо x любого элемента из M.

Высказывание $(\exists x)P(x)$ считается истинным, если $P(x)$ истинно при подстановке вместо x хотя бы одного элемента из M.

Истинность общих утверждений доказывается, как принято говорить, в общем виде, т. е. как математические теоремы. Истинность частного утверждения можно доказать с помощью примера.

Остановимся более подробно на доказательстве ложности, т. е. опровержении общих и частных утверждений. Вернемся к приведённому выше примеру $(\forall x \in \mathbb{R})(2x - 3 > 0)$. Это высказывание ложно, так как не всякое действительное число удовлетворяет неравенству $2x - 3 > 0$. Для доказательства достаточно указать хотя бы одно значение $x = 0$.

Вообще, ложность высказывания $(\forall x)P(x)$ доказывается приведением *контрпримера*, т. е. такого значения переменной x, при котором $P(x)$ ложно.

Рассмотрим теперь высказывание $(\exists x \in \mathbb{R})(x^2 + x + 1 = 0)$. Это высказывание ложно. В самом деле, не существует ни одного действительного числа, удовлетворяющего квадратному уравнению $x^2 + x + 1 = 0$. Однако это нельзя доказать с помощью примеров, так как множество действительных чисел бесконечно. В данном случае используют свойства дискриминанта. Ложность высказывания $(\exists x)P(x)$ нужно доказывать в общем виде.

Итак, ***истинность общего и ложность частного утверждений доказываются в общем виде (ни в коем случае нельзя доказывать на примерах!). Ложность общего и истинность частного утверждений можно доказывать с помощью примеров.***

Часто в математике используют словосочетание «существует единственный…». Это словосочетание записывают с помощью знака $\exists!$. Запись $(\exists! x)P(x)$ читается так: «Существует единственное значение x такое, что $P(x)$».

§ 2. Логические операции

1. ***Логическая структура сложных предложений.*** В любом языке различают простые и сложные предложения. Сложные предложения образуются из простых с помощью союзов

или связок. В математическом языке наиболее важными являются такие: ***«и»***, ***«или»***, ***«если... то»***, ***«не»*** и некоторые другие.

Для определения истинности сложного высказывания, кроме значений истинности простых (*элементарных*) высказываний, из которых оно состоит, необходимо знать точный смысл входящих в него союзов и связок. Этот смысл уточняют рассматриваемые ниже логические операции.

2. *Конъюнкция.** Эта логическая операция соответствует союзу «и». Рассмотрим пример: «cos — функция периодическая и четная». Данное сложное высказывание состоит из двух: «cos — функция периодическая», «cos — функция четная». Оба этих простых высказывания истинны, поэтому и сложное высказывание «cos — функция периодическая и четная» является истинным. В высказывании «sin — функция периодическая и четная» второе простое высказывание ложно, все сложное высказывание также ложно. Ложно также высказывание «$y = x^2$ — функция периодическая и четная» и, конечно, высказывание «$y = x^3$ — функция периодическая и четная», состоящее из двух ложных простых высказываний.

В соответствии с таким пониманием союза «и» дается

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. ***Конъюнкцией высказываний A, B*** *называется сложное высказывание, истинное тогда и только тогда, когда истинны оба высказывания A, B.*

Обозначение: $A \wedge B$. Читается: «A и B», «A конъюнкция B».

Из определения следует, что *конъюнкция двух высказываний ложна тогда и только тогда, когда ложно хотя бы одно из этих высказываний.*

По-другому конъюнкцию можно задать с помощью так называемой таблицы истинности, которая показывает зависимость значения истинности сложного высказывания от значений входящих в него простых высказываний.

A	B	$A \wedge B$
и	*и*	*и*
и	*л*	*л*
л	*и*	*л*
л	*л*	*л*

*От латинского conjunctio — «соединение».

Примером конъюнкции в математике является двойное числовое неравенство $2 < 3 < 4$. Логическая структура этого неравенства имеет вид: $(3 > 2) \wedge (3 < 4)$. Данное высказывание истинно, так как верны оба неравенства $3 > 2$ и $3 < 4$.

3. *Дизъюнкция.** Пусть, например, требуется нарисовать равнобедренный или прямоугольный треугольник. Для того чтобы правильно выполнить задание, можно нарисовать один из трех видов треугольников: равнобедренный непрямоугольный, прямоугольный неравнобедренный, равнобедренный прямоугольный.

Такому пониманию союза «или» соответствует следующее определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. ***Дизъюнкцией высказываний A, B*** *называется сложное высказывание, истинное тогда и только тогда, когда истинно хотя бы одно из высказываний A, B.*

Обозначение: $A \vee B$. Читается: «A или B», «A дизъюнкция B».

Дизъюнкция двух высказываний ложна тогда и только тогда, когда ложны оба эти высказывания.

Зададим дизъюнкцию с помощью таблицы истинности.

A	B	$A \vee B$
и	*и*	*и*
и	*л*	*и*
л	*и*	*и*
л	*л*	*л*

Пример дизъюнкции — числовое неравенство $2 \leq 3$. Логическая структура этого неравенства имеет вид: $(2 < 3) \vee (2 = 3)$. Данное высказывание истинно, так как верно неравенство $2 < 3$.

Заметим, что логические операции конъюнкции и дизъюнкции позволяют связывать любое число высказываний. При этом их конъюнкция истинна тогда и только тогда, когда истинны все составляющие ее высказывания, а дизъюнкция истинна тогда и только тогда, когда истинно хотя бы одно из них.

4. *Импликация*.** Логическая операция «импликация» соответствует конструкции «если... то». Перед тем как ввести

*От латинского disjunctio — «разделение».

**От латинского implicite — «тесно связываю».

определение этой важнейшей для математики операции, рассмотрим следующую ситуацию. Предположим, что отец сказал сыну: «Если я получу премию, то куплю тебе велосипед». Обозначим через A высказывание «я получу премию», а через B — «я куплю велосипед». Тогда обещание отца запишем так: $A \to B$. Если отец выполнит обещание, то высказывание $A \to B$ естественно считать истинным, а если нет — ложным. Рассмотрим все возможные случаи.

1. Отец получил премию и купил сыну велосипед. Все высказывания A, B, $A \to B$ — истинные.

2. Отец премию получил, но велосипед не купил. Здесь A истинно, B ложно. $A \to B$ ложно, так как отец не выполнил обещание.

3. Отец не получил премию, но велосипед купил. В этом случае A ложно, B истинно, $A \to B$ истинно, так как поступок отца не является нарушением обещания.

4. Отец не получил премию и не купил велосипед. Здесь A, B ложны. $A \to B$ нельзя считать ложным, так как отец и в этом случае не нарушил обещания.

Это показывает целесообразность следующего определения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. ***Импликацией высказываний A, B*** *называется сложное высказывание, ложное тогда и только тогда, когда A истинно, а B ложно.*

Импликация $A \to B$ читается «если A, то B», «A импликация B». В этой импликации A называют условием (посылкой), B — заключением.

Приведем таблицу истинности для импликации.

A	B	$A \to B$
и	*и*	*и*
и	*л*	*л*
л	*и*	*и*
л	*л*	*и*

Полезно запомнить следующие правила: если посылка импликации ложна, то импликация истинна (см. две последние строки

таблицы истинности); если заключение истинно, то импликация также истинна.

5. ***Отрицание.*** Эта логическая операция, в отличие от предыдущих, производится не над двумя, а над одним высказыванием. Действие этой операции соответствует действию частицы «*не*» в естественном языке. Например, отрицанием высказывания «число 47 делится на 7» является высказывание «число 47 не делится на 7» («неверно, что число 47 делится на 7»). Отрицанием высказывания «всякое натуральное число положительно» является высказывание «не всякое натуральное число положительно».

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. ***Отрицанием высказывания A*** *называется такое высказывание, которое истинно тогда и только тогда, когда A ложно.*

Обозначения: $\overline{A}$, $\neg A$. Читается: «не A», «неверно, что A».

Приведем таблицу истинности.

A	$\overline{A}$
и	*л*
л	*и*

Таким образом, нами введены логические операции: конъюнкция, дизъюнкция, импликация и отрицание. Знаки этих операций ($\wedge$, $\vee$, $\to$, $\overline{}$) называют *логическими связками.*

Введенные операции позволяют определять истинность высказываний сложной логической структуры.

§ 3. Логические формулы. Законы логики

1. ***Логические формулы.*** Рассмотрим два сложных высказывания: «если авторы этих строк работают в университете и преподают математику, то они имеют высшее образование» и «если 17 делится на 2 и на 3, то 17 делится на 6». Эти высказывания имеют одинаковую логическую структуру, которую можно представить так называемой *логической формулой* $(A \wedge B) \to C$. Буквы A, B, C являются в этом случае *высказывательными* (или *пропозициональными**) переменными, принима-

*От латинского propositio — «предложение».

ющими в качестве своих значений «*и*» или «*л*» («истина» или «ложь»).

Логические формулы строятся из высказывательных переменных с помощью знаков логических операций и скобок. При различных значениях высказывательных переменных данная формула принимает различные значения истинности. Указать всевозможные значения формулы можно с помощью таблицы истинности. Например, для приведенной выше формулы $(A \wedge B) \to C$ таблица истинности имеет следующий вид.

A	B	C	$A \wedge B$	$(A \wedge B) \to C$
и	*и*	*и*	*и*	*и*
и	*и*	*л*	*и*	*и*
и	*л*	*и*	*л*	*и*
и	*л*	*л*	*л*	*и*
л	*и*	*и*	*л*	*и*
л	*и*	*л*	*л*	*и*
л	*л*	*и*	*л*	*и*
л	*л*	*л*	*л*	*и*

Заметим, что таблица истинности для формулы с двумя высказывательными переменными имеет 4 строки, для формулы с тремя высказывательными переменными — 8 строк. Вообще, *таблица истинности для формулы с n высказывательными переменными имеет 2^n строк.* Это будет доказано позже.

2. *Равносильность формул.* Введем следующее важное понятие.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Две формулы с одними и теми же высказывательными переменными называются* ***равносильными****, если они принимают одинаковые истинностные значения в каждой строке таблицы истинности.*

Обозначение: $\equiv$. Например, $A \to B \equiv \overline{A} \vee B$. Проверить равносильность двух формул можно с помощью таблиц истинности.

Для доказательства неравносильности двух формул достаточно привести контрпример, т. е. найти хотя бы одну строку таблицы истинности (хотя бы один набор значений высказывательных переменных), в которой формулы принимают различные истинностные значения.

3. ***Законы логики.*** Наши рассуждения подчиняются определенным правилам, которые называются законами логики. Запишем некоторые из них в виде равносильностей логических формул.

1) $A \wedge B \equiv B \wedge A$; (коммутативность)
2) $A \vee B \equiv B \vee A$;
3) $(A \wedge B) \wedge C \equiv A \wedge (B \wedge C)$; (ассоциативность)
4) $(A \vee B) \vee C \equiv A \vee (B \vee C)$;
5) $A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$; (дистрибутивность)
6) $A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$;
7) $\overline{\overline{A}} \equiv A$; (закон двойного отрицания)
8) $\overline{A \wedge B} \equiv \overline{A} \vee \overline{B}$; (законы де Моргана*)
9) $\overline{A \vee B} \equiv \overline{A} \wedge \overline{B}$;
10) $\overline{A \to B} \equiv A \wedge \overline{B}$; (закон отрицания импликации)
11) $A \to B \equiv \overline{A} \vee B$; (закон устранения импликации)
12) $A \to B \equiv \overline{B} \to \overline{A}$; (закон контрапозиции)
13) $A \wedge \overline{A} \equiv л$; (закон противоречия)
14) $A \vee \overline{A} \equiv и$. (закон исключенного третьего)

Все эти законы могут быть доказаны с помощью таблиц истинности.

Равносильность можно определить и для формул, содержащих предикаты. Для таких формул справедливы все приведенные выше законы логики. Кроме того, справедливы *кванторные законы*:

15) $\overline{(\forall x)P(x)} \equiv (\exists x)\overline{P(x)}$;

16) $\overline{(\exists x)P(x)} \equiv (\forall x)\overline{P(x)}$ (законы де Моргана).

Справедливость этих законов очевидна. В самом деле, высказывание «не для всех значений $x \in \mathbb{R}$ верно неравенство $x + 1 > 2$» означает то же самое, что «существует значение $x \in \mathbb{R}$ такое, что неравенство $x + 1 > 2$ неверно». Высказывание «не существует отрицательных натуральных чисел» означает то же самое, что «любое натуральное число не является отрицательным».

Справедливы также следующие законы:

17) $(\forall x)(\forall y)P(x; y) \equiv (\forall y)(\forall x)P(x; y)$;

18) $(\exists x)(\exists y)P(x; y) \equiv (\exists y)(\exists x)P(x; y)$ (перестановка одноименных кванторов).

В то же время $(\forall x)(\exists y)P(x; y) \not\equiv (\exists y)(\forall x)P(x; y)$. Например, высказывание $(\forall x \in \mathbb{N})(\exists y \in \mathbb{N})(y > x)$ истинно (так как для лю-

*Августус де Морган (1806–1871) — шотландский математик и логик.

бого натурального числа существует большее натуральное число), в то время как высказывание $(\exists y \in \mathbb{N})(\forall x \in \mathbb{N})(y > x)$ ложно (так как не существует самого большого натурального числа).

Этот пример показывает, что очень важно помнить следующее правило.

Разноименные кванторы менять местами нельзя!

С помощью законов логики можно проводить преобразования формул.

Например, $A \to B \equiv \overline{\overline{A \to B}} \equiv \overline{A \wedge \overline{B}} \equiv \overline{A} \vee \overline{\overline{B}} \equiv \overline{A} \vee B$.

В этой цепочке преобразований последовательно применялись законы: двойного отрицания (7), отрицания импликации (10), де Моргана (8), двойного отрицания (7). В результате мы доказали с помощью преобразований закон устранения импликации (11).

Часто приходится одно и то же суждение выражать с помощью разных предложений. Чтобы при переформулировках сохранялся смысл суждения, нужно учитывать законы логики. Например, утверждение «я буду завтракать и обедать или ужинать» можно переформулировать следующим образом: «я буду завтракать и обедать или завтракать и ужинать». В этом случае использовалась дистрибутивность (5).

Важнейшим видом переформулировок является отрицание сложных предложений, в том числе предложений с кванторами. Так, предложение «неверно, что треугольник ABC прямоугольный и равнобедренный» равносильно утверждению «треугольник ABC не прямоугольный или не равнобедренный». Предложение «неверно, что всякое простое число является нечетным» означает то же самое, что «существуют четные простые числа». При построении данных отрицательных утверждений были использованы законы де Моргана.

В более сложных случаях для переформулировки выделяется логическая структура рассматриваемого предложения и полученная формула преобразуется по законам логики.

* * *

Мы описали язык, на котором может быть сформулировано практически любое математическое (и не только) предложение. Введенные выше логические связки и кванторы являются необходимым средством, определяющим логическую структуру

предложений. Это имеет важное значение для лучшего понимания сложных математических формулировок, точного выражения мысли и анализа правильности проводимых рассуждений.

§ 4. Всеобщие условные предложения. Необходимые и достаточные условия

1. ***Строение всеобщего условного предложения. Правило контрпримера.*** Многие предложения математического языка, в том числе теоремы, имеют вид *всеобщего условного предложения.*

Рассмотрим предложение из геометрии: «Диагонали ромба перпендикулярны». Выделим логическую структуру этого предложения. Для этого переформулируем его: «*Для любого* четырехугольника $ABCD$, *если* четырехугольник $ABCD$ — ромб, *то* диагонали $ABCD$ перпендикулярны».

Слова «*Для любого* четырехугольника $ABCD\ldots$» назовем *разъяснительной частью.* Назначение разъяснительной части — разъяснить, что речь в этом предложении идет о четырехугольниках и что рассматриваются *все* четырехугольники.

«…четырехугольник $ABCD$ — ромб…» — *условие.* В условии говорится, «что дано». «…диагонали $ABCD$ перпендикулярны» — *заключение.* В заключении говорится, какой вывод делается из условия.

Пусть T — множество четырехугольников. Запишем исходное предложение с помощью логических символов:

$$\underbrace{(\forall ABCD \in T)}_{\substack{\textit{разъяснительная}\\ \textit{часть}}}\big(\underbrace{(ABCD\ \text{— ромб})}_{\textit{условие}} \to \underbrace{(AC \perp BD)}_{\textit{заключение}}\big)$$

Это предложение — истинное высказывание. Иначе говоря, это теорема, которая доказывается в школьном курсе геометрии.

В общем виде ***всеобщее условное предложение*** выглядит так:

$$(\forall x \in M)(A(x) \to B(x)),$$

где $(\forall x \in M)$ называется ***разъяснительной частью***; $A(x)$ — ***условием***; $B(x)$ — ***заключением***.

Часто разъяснительную часть в формулировках опускают, имея в виду всеобщий характер предложения. Кроме того, на практике всеобщие условные предложения иногда формулируются в виде, отличном от стандартного, как, например, приведенная выше теорема о диагоналях ромба.

Всеобщее условное предложение может быть и ложным высказыванием. Как и всякое всеобщее утверждение, его можно опровергнуть контрпримером.

Выведем правило, по которому приводятся контрпримеры для всеобщих условных предложений. Пусть требуется доказать, что $[(\forall x \in M)(A(x) \to B(x))] = л$. Для этого достаточно найти элемент $a \in M$ такой, что $[A(a) \to B(a)] = л$, т. е. $[A(a)] = и$, а $[B(a)] = л$. Найденное значение $a \in M$ и будет контрпримером, доказывающим ложность высказывания $(\forall x \in M)(A(x) \to B(x))$.

Для того чтобы опровергнуть (доказать ложность) всеобщего условного предложения, достаточно найти такой элемент, при котором условие предложения будет истинно, а заключение — ложно.

Сформулированное правило будем называть *правилом контрпримера.*

Так, рассмотрим предложение $(\forall x \in \mathbb{R})((x^2 = 9) \to (x = 3))$. Видим, что при $x = -3$: $x^2 = 9$ (условие истинно), но $x \neq 3$. Значение x, равное -3, является контрпримером, доказывающим ложность приведенного предложения.

2. *Предложения, соотнесенные с данным условным предложением.* Рассмотрим предложение

$$(\forall x \in M)(A(x) \to B(x)). \tag{1}$$

Поменяем местами условие и заключение, не меняя разъяснительную часть. Получим предложение

$$(\forall x \in M)(B(x) \to A(x)). \tag{2}$$

Это предложение, ***обратное*** к (1).

Теперь условие и заключение в (1) заменим, соответственно, их отрицаниями, опять не меняя разъяснительную часть. Получилось предложение

$$(\forall x \in M)(\overline{A(x)} \to \overline{B(x)}), \tag{3}$$

называемое ***противоположным*** к предложению (1). Поменяв в (3) условие и заключение местами, оставив без изменения разъяснительную часть, получим предложение, которое имеет вид

$$(\forall x \in M)(\overline{B(x)} \to \overline{A(x)}) \tag{4}$$

и называется ***контрапозиционным*** к (1).

Сравним предложения (1) и (4). По закону контрапозиции *предложение* (1) *равносильно контрапозиционному.* По этому же закону *обратное предложение к* (1) *равносильно противоположному к* (1).

Вместе с тем *предложение* (1) *не равносильно обратному.* Так, например, предложение «Если четырехугольник — ромб, то его диагонали перпендикулярны» истинно, а обратное к нему («Если диагонали четырехугольника перпендикулярны, то он — ромб») ложно. Контрпримером может служить четырехугольник, изображенный на рисунке 1.

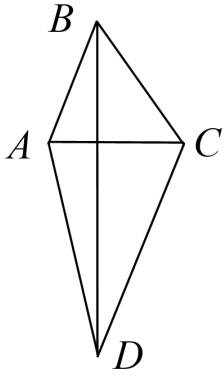


Рис. 1

Из неравносильности предложения и обратного к нему по законам логики следует, что *никакое предложение не равносильно своему противоположному.*

Заметим, что не обязательно одно из двух взаимно обратных предложений истинно, а другое ложно. В математике встречаются теоремы, обратные к которым также справедливы, например признак делимости на 3 или теорема об углах равнобедренного треугольника. Неравносильность взаимно обратных утверждений говорит лишь о том, что их нужно рассматривать независимо друг от друга. Кроме того, из сказанного выше следует, что достаточно проверить истинность любого предложения из пары (1) и (4) и любого из пары (1) и (3), чтобы получить полную информацию об истинности всех четырех связанных между собой всеобщих условных предложений.

3. *Необходимые и достаточные условия.* Известно, что всякое натуральное число, которое оканчивается двумя нулями, делится на 4. Запишем:

$$(\forall x \in \mathbb{N})((x \text{ оканчивается двумя нулями}) \to (x \text{ делится на } 4)).$$

Это высказывание истинно, а обратное к нему ложно:

$$[(\forall x \in \mathbb{N})((x \text{ делится на } 4) \to (x \text{ оканчивается двумя нулями}))] = л.$$

В самом деле, число 16 делится на 4, но не оканчивается двумя нулями.

Если мы знаем, что некоторое натуральное число оканчивается двумя нулями, то этого *достаточно* для правильного вывода, что данное число делится на 4. С другой стороны, на 4 могут делиться и числа, которые не оканчиваются двумя нулями, например число 16. Следовательно, то, что число оканчивается двумя нулями, *не необходимо* для того, чтобы это число делилось на 4.

Выясним в общем виде вопрос о необходимых и достаточных условиях. При этом будем рассматривать всеобщие условные предложения, не выделяя явно разъяснительную часть и записывая их упрощенно в виде $A \to B$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Если истинно высказывание $A \to B$, то A называют* ***достаточным условием для B****, а B называют* ***необходимым условием для A****.*

Например, для того чтобы натуральное число делилось на 4, необходимо, чтобы оно было четным. В самом деле, высказывание «Если натуральное число делится на 4, то оно четное» истинно. Такой подход также согласуется со здравым смыслом: если число не является четным, то оно, конечно, не делится на 4. Четность числа, в самом деле, является необходимым условием для делимости его на 4.

Еще раз подчеркнем: *необходимость и достаточность рассматриваются только для истинного условного предложения.* Если $[A \to B] = л$, то вопрос о необходимых и достаточных условиях не ставится.

Тот факт, что окончание натурального числа двумя нулями достаточно для его делимости на 4, можно сформулировать поразному:

«*Если* число оканчивается двумя нулями, *то* оно делится на 4»;

«*Для того чтобы* число делилось на 4, *достаточно, чтобы* оно оканчивалось двумя нулями»;

«Число делится на 4 *тогда, когда* оканчивается двумя нулями».

В общем виде для истинного высказывания $A \to B$:

«*Если A, то B*»; «*Для того чтобы* (выполнялось) *B*, *достаточно, чтобы* (выполнялось) *A*»; «*B* (выполняется) *тогда, когда* (выполняется) *A*».

Теперь выясним, какими словами можно описать необходимость.

Сначала на нашем примере:

«*Если* число делится на 4, *то* оно четное»;

«*Для того чтобы* число делилось на 4, *необходимо, чтобы* оно было четным»;

«Число делится на 4 *только тогда, когда* оно четное».

В общем виде для истинного высказывания $A \to B$:

«*Если* A, *то* B»; «*Для того чтобы* (выполнялось) A, *необходимо, чтобы* (выполнялось) B»; «A (выполняется) *только тогда, когда* (выполняется) B».

Если истинны оба высказывания $A \to B$ и $B \to A$, то B является *необходимым и достаточным* для A. В этом случае также A является *необходимым и достаточным* для B.

Другими словами это можно выразить, объединяя формулировки для необходимости и достаточности:

«*Если* A, *то* B, *и если* B, *то* A»;

«*Для того чтобы* (выполнялось) A, *необходимо и достаточно, чтобы* (выполнялось) B»;

«A (выполняется) *тогда и только тогда, когда* (выполняется) B»*.

Из сказанного следует, что доказательство необходимого и достаточного условия состоит из доказательства *двух* теорем. Как правило, это две взаимно обратные теоремы.

§ 5. Понятие множества. Множество истинности предиката

1. *Множество, элемент множества.* Понятию множества в математике не дается строгого определения. Создатель теории множеств немецкий математик Г. Кантор (1845–1918) писал: «Под множеством я понимаю вообще всякое многое, которое можно мыслить как единое»**.

Как известно, множества обозначаются буквами A, B, C, $\ldots$, M, $\ldots$. Некоторые множества имеют специальные обозначения. Например, множество натуральных чисел имеет известное обозначение $\mathbb{N}$; множество всех решений неравенства $0 < x \leq 5{,}6$ обозначается $(0;\ 5{,}6]$.

---

*В последней формулировке на самом деле утверждается, что A *достаточно и необходимо* для B, однако исторически сложилась формулировка: «необходимо и достаточно…».

**Новые идеи в математике: сборник шестой. СПб. 1914.

Множество состоит из *элементов*. Элементы множества в общем виде обозначаются a, b, c, $\ldots$, m, $\ldots$. Запись $a \in A$ означает, что элемент a *принадлежит* множеству A; запись $a \notin A$ означает, что элемент a *не принадлежит* множеству A.

Рассматривают также *пустое множество*, т. е. множество, не содержащее ни одного элемента. Пустое множество обозначается символом $\varnothing$.

2. *Способы задания множеств.* Множество считается заданным, если относительно любого элемента можно сказать, принадлежит или не принадлежит этот элемент данному множеству.

Существуют два основных способа задания множеств.

1. *Перечисление элементов.* Например, множество A задано так: $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Ясно, что $7 \in A$; $21 \notin A$. Заметим, что при таком способе задания множества не имеет значения порядок перечисления элементов.

2. *Указание характеристического свойства.* Например, числовой промежуток $(0; 5{,}6]$ можно задать следующим образом: $(0; 5{,}6] = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \leq 5{,}6\}$. Здесь множество $\mathbb{R}$ действительных чисел считается универсальным множеством; неравенство $0 < x \leq 5{,}6$ — характеристическое свойство элементов данного множества.

Например, мы знаем, что $2 \in (0; 5{,}6]$, поскольку неравенство $0 < 2 \leq 5{,}6$ выполняется; $-1 \notin (0; 5{,}6]$, так как не выполняется неравенство $0 < -1 \leq 5{,}6$. Легко заметить, что $x \in (0; 5{,}6]$ тогда и только тогда, когда выполняется неравенство $0 < x \leq 5{,}6$.

В общем виде запись множества, заданного с помощью характеристического свойства, выглядит следующим образом: $A = \{x \in M \mid P(x)\}$. Здесь M — ***универсальное множество***, предикат $P(x)$ — ***характеристическое свойство***. При этом

$$x_0 \in A \Leftrightarrow [P(x_0)] = и; \qquad x_0 \notin A \Leftrightarrow [P(x_0)] = л.$$

Таким образом, ***характеристическое свойство представляет собой необходимое и достаточное условие принадлежности элемента данному множеству***.

Указание характеристического свойства — более универсальный способ задания множества, чем перечисление элементов. С помощью перечисления элементов можно задавать только так

называемые *конечные* множества. Вместе с тем существуют множества, например $\mathbb{N}$, которые невозможно задать перечислением элементов. Такие множества называют *бесконечными*. С помощью характеристического свойства можно задавать как конечные, так и бесконечные множества.

3. *Равенство множеств. Подмножество.* Начнем со следующего определения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Множества A и B называются равными, если они состоят из одних и тех же элементов.*

Обозначение: $A = B$.

Например, равны множество A всех однозначных натуральных чисел и множество B всех натуральных решений неравенства $x \leq 9$: оба эти множества состоят из чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Также являются равными множества $A = \{1, 2, 3\}$ и $B = \{1, 3, 2\}$: *множество не изменяется при изменении порядка перечисления его элементов.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. *Множество A называется* ***подмножеством множества B****, если любой элемент A принадлежит B.*

Обозначение: $A \subset B$. Сформулированное определение можно записать символически: $A \subset B \overset{df}{\Leftrightarrow} (\forall x)((x \in A) \to (x \in B))$.

Знак «$\subset$» называют знаком включения. Запись $A \subset B$ читают по-разному: «A — подмножество B», «A включается в B», «A содержится в B» и т. п. Для всякого множества A выполняется: $\varnothing \subset A$ и $A \subset A$.

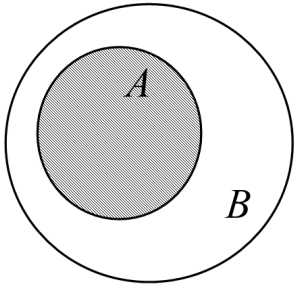


Рис. 2

То, что $A \subset B$, можно наглядно изобразить с помощью *диаграммы Эйлера** (иногда говорят «диаграммы Эйлера – Венна»). На диаграмме Эйлера множество изображается, скажем, в виде круга, а элементы множества — в виде точек этого круга (см. рис. 2).

Для примера рассмотрим множества

$$A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 4k + 3, \text{ где } k \in \mathbb{Z}\},$$
$$B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 2n + 1, \text{ где } n \in \mathbb{Z}\}.$$

*Леонард Эйлер (1707–1783) — швейцарский математик, долгое время работал в России.

Покажем, что $A \subset B$, но $B \not\subset A$.

Возьмем произвольный элемент $x_0 \in \mathbb{Z}$. Пусть $x_0 \in A$, следовательно, найдется такое целое число k, что $x_0 = 4k + 3$. Тогда $x_0 = 4k+3 = 4k+2+1 = 2(2k+1)+1 = 2k_1+1$, где $k_1 \in \mathbb{Z}$; значит, $x_0 \in B$.

Так как элемент $x_0 \in \mathbb{Z}$ был взят произвольно, то все доказанное для этого элемента верно для любого целого числа. Таким образом, любое целое число, принадлежащее множеству A, принадлежит также множеству B. Поэтому $A \subset B$.

Можно убедиться, что $-7 \in B$, но $-7 \notin A$. Этот контрпример показывает, что $B \not\subset A$.

Включение множеств имеет следующие свойства:

1) $A \subset A$ для любого множества A;

2) если $A \subset B$ и $B \subset C$, то $A \subset C$.

Эти свойства можно проиллюстрировать на диаграммах Эйлера, а также легко доказать с помощью рассуждений, аналогичных приведенным выше. Кроме того, считают, что пустое множество является подмножеством любого множества ($\varnothing \subset A$ для любого множества A).

Легко видеть, что $\boxed{A = B \Leftrightarrow A \subset B \text{ и } B \subset A}$.

Этим фактом часто пользуются при доказательстве равенства множеств.

Так, из предыдущего примера видно, что $A \neq B$.

Рассмотрим множество $C = \{x \in \mathbb{Z} | x = 4k - 1, \text{ где } k \in \mathbb{Z}\}$.

1) Пусть $x_0 \in A$, т. е. $x_0 = 4k + 3$, где $k \in \mathbb{Z}$; тогда можно записать: $x_0 = 4k + (4 - 1) = (4k + 4) - 1 = 4(k + 1) - 1$; таким образом, $x_0 = 4k_1 - 1$, где $k_1 \in \mathbb{Z}$, следовательно, $x_0 \in C$. В силу произвольности $x_0 \in A$, показано, что $A \subset C$.

2) Пусть $x_0 \in C$, т. е. $x_0 = 4k - 1$, где $k \in \mathbb{Z}$; тогда, как и выше: $x_0 = 4k + (4 - 4) - 1 = (4k - 4) + 3 = 4(k - 1) + 3$; таким образом, $x_0 = 4k_1 + 3$, где $k_1 \in \mathbb{Z}$, следовательно, $x_0 \in A$. В силу произвольности $x_0 \in C$, показано, что $C \subset A$.

Из пунктов 1 и 2 следует, что $A = C$.

Равенство множеств A и C было доказано так называемым методом двух включений. Этот метод широко применяется при доказательстве равенства множеств.

4. *Множество истинности предиката.* Пусть на множестве M задан предикат $P(x)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. ***Множеством истинности предиката $P(x)$*** *называется множество, состоящее в точности из всех элементов множества M, при которых $[P(x)] = и$.*

Обозначение: $M(P)$. Символически: $M(P) \stackrel{df}{=} \{x \in M | P(x)\}$.

Из определения видно:

$$x_0 \in M(P) \Leftrightarrow [P(x_0)] = и; \quad x_0 \notin M(P) \Leftrightarrow [P(x_0)] = л.$$

Таким образом, предикат является характеристическим свойством своего множества истинности.

Рассмотрим следующие примеры.

1. $P(x)$: «x — простое число», $x \in \mathbb{N}$; $7 \in M(P)$; $27 \notin M(P)$.
2. $Q(x)$: $x^2 - 3x + 2 = 0$, $x \in \mathbb{R}$; $M(P) = \{1; 2\}$.
3. $S(x)$: $x^2 - 3x + 2 \leq 0$, $x \in \mathbb{R}$; $M(P) = [1; 2]$.
4. $T(x)$: $x^2 + 2 \leq 0$, $x \in \mathbb{R}$; $M(P) = \varnothing$.

Вообще, множество решений уравнения (неравенства) есть множество истинности соответствующего предиката; решить уравнение (неравенство) — найти это множество истинности.

По аналогии можно определить множество истинности предиката с двумя, тремя и т. д. переменными как множество соответствующих пар, троек и т. д. элементов.

§ 6. Операции над множествами

1. *Пересечение множеств.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Пересечением множеств A и B*** *называется множество, состоящее из всех тех и только тех элементов, которые принадлежат обоим этим множествам.*

Обозначение: $A \cap B$.

Иначе говоря, $A \cap B$ состоит из всех общих элементов множеств A и B.

Изобразим $A \cap B$ с помощью диаграммы Эйлера (см. рис. 3).

Здесь и в дальнейшем будем полагать, что множества A и B представляют собой подмножества некоторого множества U, называемого *универсальным множеством.*

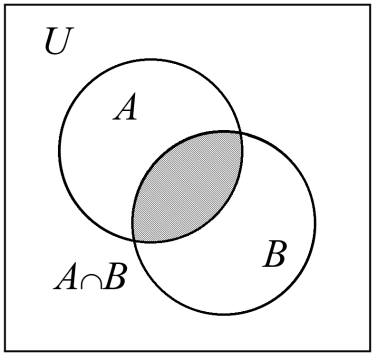


Рис. 3

Используя сформулированное определение, множество $A \cap B$ можно задать при помощи характеристического свойства:

$$A \cap B = \{x \mid (x \in A) \wedge (x \in B)\}.$$

Таким образом:

$$x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \text{ и } x \in B;$$

$$x \notin A \cap B \Leftrightarrow x \notin A \text{ или } x \notin B.$$

Заметим, что условие для $x \notin A \cap B$ может быть получено из условия для $x \in A \cap B$ по закону де Моргана.

Пусть $A = (-\infty; 2]$; $B = (-2; 5)$. Тогда $A \cap B = (-2; 2]$. Эти множества можно изобразить графически (см. рис. 4).

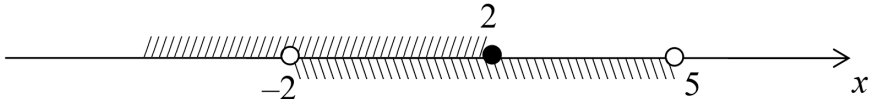


Рис. 4

Докажем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 1. *Множество истинности конъюнкции двух предикатов равно пересечению множеств истинности этих предикатов:*

$$M(P \wedge Q) = M(P) \cap M(Q).$$

Докажем эту теорему методом двух включений, описанным в предыдущем параграфе.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $P(x)$ и $Q(x)$ — предикаты, заданные на множестве M; $M(P)$ и $M(Q)$ — их множества истинности соответственно. Возьмем произвольный элемент $x_0 \in M$.

1. Пусть $x_0 \in M(P \cap Q)$, тогда $[P(x_0) \cap Q(x_0)] = u$; отсюда $[P(x_0)] = u$ и $[Q(x_0)] = u$; значит, $x_0 \in M(P)$ и $x_0 \in M(Q)$, поэтому $x_0 \in M(P) \cap M(Q)$.

В силу произвольности x_0, любой элемент, принадлежащий $M(P \wedge Q)$, принадлежит $M(P) \cap M(Q)$. Следовательно, по определению подмножества, $M(P \wedge Q) \subset M(P) \cap M(Q)$.

2. Пусть $x_0 \in M(P) \cap M(Q)$, тогда $x_0 \in M(P)$ и $x_0 \in M(Q)$, отсюда $[P(x_0)] = u$ и $[Q(x_0)] = u$; значит, $[P(x_0) \wedge Q(x_0)] = u$; поэтому $x_0 \in M(P \wedge Q)$.

В силу произвольности x_0, любой элемент из $M(P) \cap M(Q)$ принадлежит $M(P \wedge Q)$. Следовательно, $M(P) \cap M(Q) \subset M(P \wedge Q)$.

Показано: $M(P \wedge Q) \subset M(P) \cap M(Q)$ и $M(P) \cap M(Q) \subset M(P \wedge Q)$.

Отсюда следует, что $M(P \wedge Q) = M(P) \cap M(Q)$. ■

2. *Объединение множеств.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Объединением множеств A и B*** *называется множество, состоящее из всех тех и только тех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из этих множеств.*

Обозначение: $A \cup B$.

Изобразим $A \cup B$ с помощью диаграммы Эйлера (см. рис. 5).

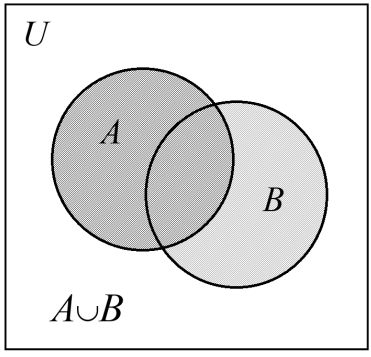


Рис. 5

Зададим $A \cup B$ с помощью характеристического свойства:

$$A \cup B = \{x \mid (x \in A) \vee (x \in B)\}.$$

По определению $x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A$ или $x \in B$; $x \notin A \cup B \Leftrightarrow x \notin A$ и $x \notin B$.

В условиях предыдущего примера, где $A = (-\infty; 2]$, $B = (-2; 5)$, получим, что $A \cup B = (-\infty; 5]$.

Имеет место следующее утверждение о множестве истинности дизъюнкции двух предикатов.

ТЕОРЕМА 2. *Множество истинности дизъюнкции двух предикатов равно объединению множеств истинности этих предикатов:*

$$M(P \vee Q) = M(P) \cup M(Q).$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1. Заметим, что теоремы 1 и 2 представляют собой обоснование стандартных способов решения систем и совокупностей уравнений и неравенств. В самом деле, любая система, состоящая из уравнений или неравенств, есть конъюнкция соответствующих предикатов, а совокупность — их дизъюнкция.

3. *Разность множеств. Дополнение множества.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Разностью множеств A и B*** *называется множество, состоящее из всех тех и только тех элементов, которые принадлежат A и не принадлежат B.*

Обозначение: $A - B$ или $A \backslash B$.

Диаграмма Эйлера для множества $A - B$ изображена на рисунке 6.

Зададим множество с помощью характеристического свойства:

$$A - B = \{x \mid (x \in A) \wedge (x \notin B)\}.$$

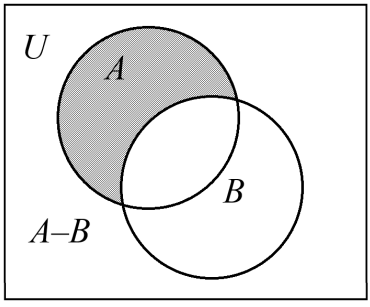


Рис. 6

Имеем: $x \in A - B \Leftrightarrow x \in A$ и $x \notin B$; $x \notin A - B \Leftrightarrow x \notin A$ или $x \in B$.

Если, как в предыдущих примерах, $A = (-\infty; 2]$, $B = (-2; 5)$, то получим, что $A - B = (-\infty; -2]$.

Разность универсального множества U и множества A называют *дополнением множества A (до универсального множества)* и обозначают $\overline{A}$.

Символически: $\overline{A} = \{x \mid x \notin A\}$. Тогда $x \in \overline{A} \Leftrightarrow x \notin A$; $x \notin \overline{A} \Leftrightarrow x \in A$.

Рассматривая тот же пример, где $A = (-\infty; 2]$, $B = (-2; 5)$, получим: $\overline{A} = (2; +\infty)$; $\overline{B} = (-\infty; -2] \cup [5; +\infty)$.

ТЕОРЕМА 3. *Множество истинности отрицания предиката равно дополнению множества истинности этого предиката:*

$$M(\overline{P}) = \overline{M(P)}.$$

Доказательство также аналогично доказательству теоремы 1.

4. *Алгебра множеств.* Операции над множествами подчиняются законам, аналогичным законам логики*:

1) $A \cap B = B \cap A$;
2) $A \cup B = B \cup A$; (коммутативность)

*Следует обратить внимание: законы логики выражают равносильность логических формул, поэтому при их записи применяется знак равносильности формул ($\equiv$). Законы операций над множествами выражают равенство множеств, поэтому для их записи применяется обычный знак равенства.

3) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$;
4) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$; (ассоциативность)
5) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;
6) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$; (дистрибутивность)
7) $\overline{\overline{A}} = A$; (закон двойного дополнения)
8) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$;
9) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$; (законы де Моргана)
10) $A - B = A \cap \overline{B}$;
11) $A \cap \overline{A} = \varnothing$;
12) $A \cup \overline{A} = U$;
13) $A \cap U = A$;
14) $A \cup \varnothing = A$;
15) $A \cap A = A$;
16) $A \cup A = A$.

Все эти законы также доказываются методом двух включений. В качестве примера упростим сложное выражение, составленное из множеств:

$$(A - B) \cup \overline{\overline{A} \cup \overline{B}} \overset{9}{=} (A - B) \cup (\overline{\overline{A}} \cap \overline{\overline{B}}) \overset{7}{=} (A - B) \cup (A \cap B) \overset{10}{=}$$
$$= (A \cap \overline{B}) \cup (A \cap B) \overset{5}{=} A \cap (\overline{B} \cup B) \overset{2}{=} A \cap (B \cup \overline{B}) \overset{12}{=} A \cap U \overset{13}{=} A.$$

§ 7. Следование и равносильность предикатов

1. ***Следование предикатов.***

Пусть $P(x)$ и $Q(x)$ — предикаты, заданные на некотором множестве M; $M(P)$ и $M(Q)$ — их множества истинности.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Говорят, что* ***из предиката $P(x)$ следует предикат $Q(x)$****, если* $M(P) \subset M(Q)$.

Обозначение: $P(x) \Rightarrow Q(x)$.

Приведем пример. Пусть M — множество натуральных чисел от 1 до 50; $P(x)$: «x делится на 12»; $Q(x)$: «x делится на 4». Найдем множества истинности этих предикатов: $M(P) = \{12, 24, 36, 48\}$; $M(Q) = \{4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40, 44, 48\}$. Легко понять, что $M(P) \subset M(Q)$, значит, $P(x) \Rightarrow Q(x)$. Заметим, что $x \vdots 4$ при всех значениях $x \in M$, при которых $x \vdots 12$. Подобное свойство имеет место в случае следования любых предикатов.

***Свойство* 1.** *$P(x) \Rightarrow Q(x)$ тогда и только тогда, когда $Q(x)$ истинно при всех значениях $x \in M$, при которых истинно $P(x)$.*

1. *Необходимость.*
Дано: $P(x) \Rightarrow Q(x)$.
Доказать: $Q(x)$ истинно при всех $x \in M$, при которых истинно $P(x)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x_0 \in M$ — произвольный элемент, $P(x_0)$ истинно, тогда $x_0 \in M(P)$. По условию, $M(P) \subset M(Q)$, отсюда $x \in M(Q)$, следовательно, $Q(x_0)$ истинно. Так как элемент x_0 был взят произвольно, то доказанное верно для любых значений $x \in M$.

2. *Достаточность.*
Дано: $Q(x)$ истинно при всех $x \in M$, при которых истинно $P(x)$.
Доказать: $P(x) \Rightarrow Q(x)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x_0 \in M$ — произвольный элемент, причем $x_0 \in M(P)$, тогда $[P(x_0)] = и$. По условию, $[Q(x_0)] = и$, тогда $x_0 \in M(Q)$. В силу произвольности элемента $x_0 \in M$, доказанное верно для любых значений $x \in M$. Значит, любой элемент из $M(P)$ принадлежит $M(Q)$. Следовательно, $M(P) \subset M(Q)$, поэтому $P(x) \Rightarrow Q(x)$. ■

Свойство 1 раскрывает смысл понятия «следование предикатов». Именно такой смысл и понимают обычно в математике под словом «следует».

***Свойство* 2.** *$P(x) \Rightarrow Q(x)$ тогда и только тогда, когда истинно всеобщее условное предложение $(\forall x \in M)(P(x) \to Q(x))$.*

1. *Необходимость.*
Дано: $P(x) \Rightarrow Q(x)$.
Доказать: $[(\forall x \in M)(P(x) \to Q(x))] = и$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x_0 \in M$ — произвольный элемент. Рассмотрим два случая.

Случай 1. $[P(x_0)] = и$. Так как по условию $P(x) \Rightarrow Q(x)$, то, по свойству 1, $[Q(x_0)] = и$. Отсюда $[(P(x_0) \to Q(x0))] = и$.

Случай 2. $[P(x_0)] = л$. Тогда $[(P(x_0) \to Q(x_0))] = и$ по определению импликации.

Получено, что во всех случаях $[(P(x_0) \to Q(x_0))] = и$. Так как элемент x_0 был взят произвольно, $[(P(x_0) \to Q(x_0))] = и$ для любых значений $x \in M$. Следовательно, $[(\forall x \in M)(P(x) \to Q(x))] = и$.

2. *Достаточность.*
Дано: $[(\forall x \in M)(P(x) \to Q(x))] = и$.
Доказать: $P(x) \Rightarrow Q(x)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x_0 \in M$ — произвольный элемент, причем $[P(x_0)] = и$. Тогда $Q(x_0)$ не может быть ложным. В самом деле, предположим, что $[Q(x_0)] = л$. Так как $[P(x_0)] = и$, то $[(P(x_0) \to Q(x_0))] = л$, что противоречит условию. Итак, если истинно $P(x_0)$, то истинно и $Q(x_0)$. В силу произвольности элемента $x_0 \in M$, доказанное верно для любых значений $x \in M$. По свойству 1, $P(x) \Rightarrow Q(x)$. ■

Приведем еще два примера.

***Пример* 1**. В качестве предикатов возьмем два неравенства: $x > 2$ и $|x| > 2$. Множества истинности этих предикатов — это множество решений данных неравенств (см. рис. 7).

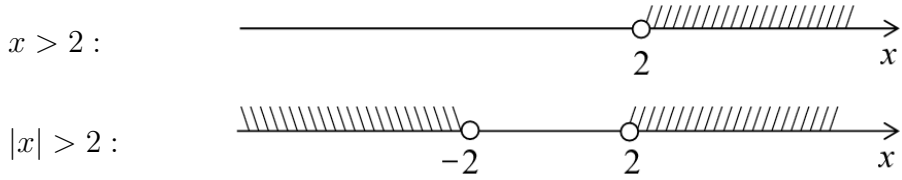


Рис. 7

Каждое решение неравенства $x > 2$ является решением неравенства $|x| > 2$, т. е. множество истинности первого предиката содержится во множестве истинности второго предиката. Так что второе неравенство следует из первого: $(x > 2) \Rightarrow (|x| > 2)$. Это вполне отвечает нашему здравому смыслу и свойству 1: если число больше 2, то его модуль тоже больше 2. Заметим, что, установив следование данных предикатов, мы, согласно свойству 2, доказали истинность высказывания $(\forall x \in \mathbb{R})((x > 2) \to (|x| > 2))$.

***Пример* 2**. Рассмотрим уравнение $\sqrt{x-1} = x - 3$. Возведя обе части этого уравнения в квадрат, получим: $x - 1 = (x-3)^2$. Таким образом, $(\sqrt{x-1} = x - 3) \Rightarrow (x - 1 = (x-3)^2)$. Следовательно, решения первого уравнения составляют часть множества (т. е. подмножество) решений второго уравнения. Решая второе уравнение обычным способом, получаем множество решений, состоящее из чисел 5 и 2. Число 5 удовлетворяет исходному уравнению, а число 2 — не удовлетворяет. Следовательно, решением уравнения $\sqrt{x-1} = x - 3$ является число 5.

2. *Равносильность предикатов.* Пусть предикаты $P(x)$ и $Q(x)$ заданы на множестве M; $M(P)$ и $M(Q)$ — их множества истинности.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Предикаты $P(x)$ и $Q(x)$ называются* ***равносильными****, если $M(P) = M(Q)$.*

Примерами равносильных предикатов являются предложения: «x делится на 12» и «x делится на 4 и на 3» на множестве натуральных чисел от 1 до 50. В самом деле, оба эти предиката имеют одно и то же множество истинности: $\{12, 24, 36, 48\}$.

Легко заметить, что *предикаты $P(x)$ и $Q(x)$ равносильны тогда и только тогда, когда $P(x) \Rightarrow Q(x)$ и $Q(x) \Rightarrow P(x)$*. В связи с этим, равносильность предикатов в литературе чаще всего обозначается так: $P(x) \Leftrightarrow Q(x)$.

Рассмотрим, например, неравенство $|x| > 2$ и совокупность (дизъюнкцию) неравенств: $\left[\begin{array}{l} x < -2; \\ x > 2 \end{array}\right.$ (см. рис. 8).

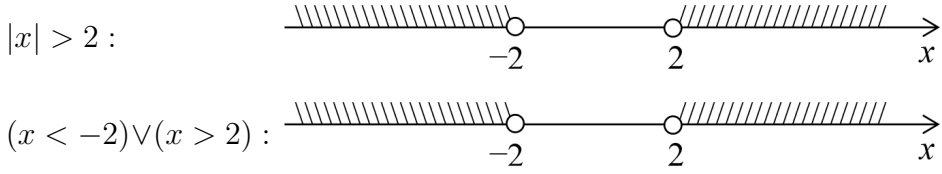


Рис. 8

Сравнив множества истинности данных предикатов, имеем, что

$$|x| > 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < -2; \\ x > 2. \end{array}\right.$$

Выше уже встречалось уравнение $\sqrt{x-1} = x - 3$. Множество его решений состоит из одного числа 5. Из этого уравнения, как вы видели, следует уравнение $x - 1 = (x-3)^2$, множество решений которого состоит из чисел 5 и 2. Теперь рассмотрим систему:

$$\begin{cases} x - 1 = (x-3)^2; \\ x - 3 \geq 0. \end{cases}$$

Число 2, которое является решением уравнения, входящего в систему, не удовлетворяет неравенству $x - 3 \geq 0$, а число 5 удов-

летворяет как уравнению, так и неравенству из этой системы. Уравнение $\sqrt{x-1} = x-3$ и последняя система имеют одно и то же множество решений, состоящее из числа 5. Следовательно,

$$\sqrt{x-1} = x-3 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 = (x-3)^2; \\ x-3 \geq 0. \end{cases}$$

ГЛАВА 2
Индукция и комбинаторика

§ 8. Система натуральных чисел. Метод математической индукции

1. ***Система натуральных чисел.*** Система натуральных чисел, или *натуральный ряд*, является исходной числовой системой, на базе которой строятся другие числовые системы — целых, рациональных, действительных, позже — комплексных чисел.

Система натуральных чисел строится аксиоматическим методом, аналогично школьному курсу геометрии.

Основными объектами являются *натуральные числа*; из натуральных чисел выделено число 1. Множество натуральных чисел обозначается $\mathbb{N}$.

Основная операция на множестве натуральных чисел — *непосредственное следование*. С помощью этой операции определяются известные операции над натуральными числами, например сложение и умножение. Натуральное число, непосредственно следующее за натуральным числом x, обозначается $x + 1$.

Все предложения теории натуральных чисел могут быть выведены из основных свойств, или *аксиом натурального ряда*. Эти аксиомы введены итальянским математиком Дж. Пеано (1858–1932) и поэтому носят название «аксиомы Пеано». Приведем эти аксиомы:

1. Число 1 не следует непосредственно ни за каким натуральным числом.

2. За каждым натуральным числом непосредственно следует единственное натуральное число.

3. Каждое натуральное число непосредственно следует не более чем за одним натуральным числом.

4. (Аксиома математической индукции.) Если некоторое множество M содержит число 1 и вместе с каждым натуральным числом n содержит непосредственно следующее за ним число

$n+1$, то M содержит все множество натуральных чисел в качестве подмножества.

На основании аксиомы 4 формулируется ***принцип математической индукции:*** *если предложение $A(n)$ таково, что:*

1) $A(1)$ *истинно;*

2) *из истинности $A(k)$, где k — произвольное натуральное число, следует истинность $A(k+1)$,*

то $A(n)$ истинно для любого $n \in \mathbb{N}$.

Действительно, пусть $A(n)$ — предикат, удовлетворяющий условиям 1 и 2, $M(A)$ — множество его истинности. Поскольку $[A(1)] \equiv u$, то $1 \in M(A)$. Поскольку из того, что $[A(k)] = u$, следует, что $[A(k+1)] = u$, то из включения $k \in M(A)$ следует, что $k+1 \in M(A)$. По аксиоме математической индукции $\mathbb{N} \subset M(A)$, т. е. $A(n)$ истинно при всех $n \in \mathbb{N}$.

Смысл принципа математической индукции заключается в следующем. Предположим, что некоторое утверждение о натуральном числе n удовлетворяет условиям 1 и 2. Тогда из истинности этого утверждения при $n = 1$ следует его истинность при $n = 2$, затем при $n = 3$ и т. д., т. е. для всех натуральных n.

2. *Метод математической индукции.* На принципе математической индукции основан метод доказательства теорем о натуральных числах, который называется *методом математической индукции.*

Пусть требуется доказать некоторое утверждение $A(n)$, где $n \in \mathbb{N}$. Метод математической индукции состоит из следующих этапов:

1. (*Базис индукции**.) *Доказывается истинность $A(1)$, т. е. истинность $A(n)$ при $n = 1$.*

2. (*Индукционный шаг.*) *Предполагается, что утверждение истинно при $n = k$, и из этого предположения выводится, что данное утверждение истинно при $n = k+1$.*

После выполнения пунктов 1 и 2 на основании принципа математической индукции делается вывод, что утверждение $A(n)$

*Иногда говорят «база индукции».

истинно для любого натурального n. В этом случае говорят, что утверждение доказано *индукцией по* n.

Пример. Докажем индукцией по n, что сумма первых n чисел натурального ряда равна $\dfrac{n(n+1)}{2}$, т. е. $1+2+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$.

1*. Докажем, что утверждение истинно при $n=1$. В самом деле, $1=\dfrac{1\cdot(1+1)}{2}$.

2. Пусть утверждение истинно при $n=k$, т. е. имеет место равенство: $1+2+\cdots+k=\dfrac{k(k+1)}{2}$. Выведем из этого предположения, что данное утверждение верно при $n=k+1$, т. е. $1+2+\cdots+k+(k+1)=\dfrac{(k+1)\cdot((k+1)+1)}{2}$.

По предположению, $1+2+\cdots+k=\dfrac{k(k+1)}{2}$, тогда

$$1+2+\cdots+k+(k+1)=$$
$$=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)=\frac{k\cdot(k+1)+2(k+1)}{2}=$$
$$=\frac{(k+1)(k+2)}{2}=\frac{(k+1)\cdot((k+1)+1)}{2}.$$

Утверждение доказано при $n=1$ и из предположения, что оно верно при $n=k$, получено, что оно верно при $n=k+1$. Как говорят, *индукция завершена*. На основании принципа математической индукции делается вывод, что утверждение справедливо для всех $n\in\mathbb{N}$.

В заключение отметим, что в математической практике метод математической индукции применяется и в некоторых других формах.

Во-первых, некоторые утверждения могут доказываться, начиная не с 1, а с другого натурального числа. Тогда базис индукции соответствующим образом меняется. Иногда базис содержит доказательство для нескольких начальных чисел.

Во-вторых, индукционный шаг может проводиться так: предполагается, что $A(n)$ верно для всех $n<k$, и доказывается истинность $A(n)$ при $n=k$.

---

*На практике обычно опускают названия этапов. Кроме того, часто опускают вывод, сформулированный в примере в конце доказательства.

Все приведенные разновидности метода математической индукции вытекают из четвертой аксиомы Пеано и широко распространены в математике.

§ 9. Декартово произведение множеств. Правило произведения

1. *Декартово произведение двух множеств.* Будем рассматривать *упорядоченные пары* элементов некоторого множества. Упорядоченная пара* , состоящая из элементов a и b, обозначается $(a; b)$. Элемент a называется *первой компонентой*, b — *второй компонентой* пары $(a; b)$.

По определению, $(a; b) = (c; d)$, если $a = c$ и $b = d$. Отсюда следует, что если элементы a и b различны, то $(a; b) \neq (b; a)$.

Упорядоченная пара действительных чисел геометрически представляет точку координатной плоскости, заданную своими координатами.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Декартовым (прямым) произведением множеств A и B*** *называется множество, состоящее из всех пар, первый элемент которых принадлежит A, а второй принадлежит B.*

Обозначение: $A \times B$.

Символически: $A \times B \overset{df}{=} \{(a; b) \mid a \in A \text{ и } b \in B\}$.

Например, рассмотрим множества $A = \{a, b, c\}$ и $B = \{0, 1\}$. Тогда

$$A \times B = \{(a; 0), (a; 1), (b; 0), (b; 1), (c; 0), (c; 1)\};$$

$$B \times A = \{(0; a), (1; a), (0; b), (1; b), (0; c), (1; c)\}.$$

Видим, что множества $A \times B$ и $B \times A$ состоят из различных элементов (пар), поэтому $A \times B \neq B \times A$.

Приведенный пример показывает, что *декартово произведение двух множеств не подчиняется переместительному закону* (как говорят в алгебре, *не является коммутативным*), т. е., вообще говоря, $A \times B \neq B \times A$.

---

*Иногда для краткости говорят просто «пара».

Для конечных множеств A и B число пар в декартовом произведении $A \times B$ позволяет определить следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть множество A содержит m элементов; множество B содержит n элементов. Тогда множество $A \times B$ содержит $m \cdot n$ элементов (пар).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По условию $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ и $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$. Построим следующую таблицу.

$A \backslash B$	b_1	b_2	$\ldots$	b_n
a_1				
a_2				
$\ldots$				
a_m				

В декартовом произведении $A \times B$ столько пар, сколько пустых клеток в таблице: в каждом столбце m пар, столбцов n, значит, всего $m \cdot n$ пар. ■

2. *Декартово произведение произвольного числа множеств.* Наряду с упорядоченными парами рассматриваются *упорядоченные наборы* (иногда говорят просто «наборы») с числом элементов 3, 4 и т. д. Упорядоченный набор длины n ($n \geq 2$) с элементами $a_1, a_2, \ldots, a_n$ обозначается $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Два упорядоченных набора считаются равными, если равны все их соответствующие (стоящие на одинаковых местах) компоненты.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Декартовым (прямым) произведением множеств A_1, A_2, ..., A_n*** *называется множество, состоящее из всех упорядоченных наборов вида $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, где $a_1 \in A_1$, $a_2 \in A_2$, ..., $a_n \in A_n$.*

Декартово произведение множеств $A_1, A_2, \ldots, A_n$ обозначается через $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$. Декартово произведение $A \times A \times \cdots \times A$ (n «множителей») обозначают еще A^n. Например, иногда встречается обозначение $\mathbb{R}^2$ для множества всех точек координатной плоскости.

Имеет место утверждение, аналогичное теореме 1.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть множество A_1 содержит m_1 элементов; множество A_2 содержит m_2 элементов; ...; множество A_n*

содержит m_n элементов. Тогда множество $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ содержит $m_1 \cdot m_2 \cdot \ldots \cdot m_n$ элементов (наборов длины n).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО (индукция по n, где $n \geq 2$).

1. Для $n = 2$ утверждение доказано в теореме 1.

2. Предположим, что утверждение верно для $n = k$, т. е. декартово произведение $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_k$ содержит $m_1 \cdot m_2 \cdot \ldots \cdot m_k$ элементов (наборов). Докажем, что данное утверждение верно для $n = k + 1$, т. е. множество $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_k \times A_{k+1}$ содержит $m_1 \cdot m_2 \cdot \ldots \cdot m_k \cdot m_{k+1}$ наборов длины $k + 1$.

Наборов в декартовом произведении $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_k \times A_{k+1}$ будет, очевидно, столько же, сколько элементов в декартовом произведении двух множеств: $(A_1 \times \cdots \times A_k) \times A_{k+1}$. Последнее состоит из пар $((a_1, \ldots, a_k); a_{k+1})$, где $(a_1, \ldots, a_k) \in A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_k$ и $a_{k+1} \in A_{k+1}$. По теореме 1, число элементов в этом декартовом произведении равно $m \cdot m_{k+1}$, где m — число элементов множества $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_k$. По предположению индукции, $m = m_1 \cdot m_2 \cdot \ldots \cdot m_k$; тогда искомое число равно $m_1 \cdot m_2 \cdot \ldots \cdot m_k \cdot m_{k+1}$. На этом индукция завершена. ■

3. *Правило произведения.* В математике значительное место занимают так называемые *комбинаторные задачи*, связанные с подсчетом числа элементов различных конечных множеств, перебором конечного числа вариантов и т. п. Раздел математики, занимающийся изучением комбинаторных задач, называется *комбинаторикой*.

Одним из основных правил, которые применяются при решении комбинаторных задач, является ***правило произведения***.

Пусть элемент a_1 можно выбрать m_1 способами, элемент a_2 — выбрать m_2 способами, ..., элемент a_n — выбрать m_n способами. Тогда существует в точности $m_1 \cdot m_2 \cdot \ldots \cdot m_n$ способов задания упорядоченного набора $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

Данное правило фактически составляет содержание теоремы 2 предыдущего пункта.

Иногда правило произведения формулируют в другом виде.

Пусть имеется «клетка» с n «ячейками», причем первую «ячейку» можно заполнить m_1 способами, вторую «ячейку» — m_2 способами, ..., последнюю — m_n способами (см. рис. 9).

Рис. 9

Тогда существует в точности $m_1 \cdot m_2 \cdot \ldots \cdot m_n$ способов заполнения всей «клетки».

***Пример* 1**. Назовем *двоичным набором* длины n такой упорядоченный набор, каждый элемент которого может принимать одно из двух значений. Требуется узнать, сколько существует таких двоичных наборов. Для решения задачи построим «клетку» с n «ячейками», каждую из которых можно заполнить двумя способами (например, 0 или 1; «*и*» или «*л*» и т. п.). Так как «ячеек» n, то клетку можно заполнить $2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2$, т. е. 2^n способами. Следовательно, число двоичных наборов длины n равно 2^n. В частности, таблица истинности для логической формулы с n высказывательными переменными имеет 2^n строк. В самом деле, каждая строка представляет собой двоичный набор длины n.

***Пример* 2**. Найти число всех подмножеств конечного множества из n элементов.

Решим задачу следующим образом.

Пусть $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ — данное множество; B — его произвольное подмножество. Любой элемент $a_i \in A$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ либо входит, либо не входит в B, поэтому подмножеству B соответствует двоичный набор длины n, в котором на i-м месте стоит 1, если $a_i \in B$, либо 0, если $a_i \notin B$.

Например, при $n = 5$ подмножеству $B = \{a_1, a_2, a_5\}$ соответствует набор $(1, 1, 0, 0, 1)$; набор $(1, 1, 1, 1, 1)$ соответствует самому множеству; набор $(0, 0, 0, 0, 0)$ — пустому множеству. Легко видеть, что число всех подмножеств множества A совпадает с числом двоичных наборов длины n, т. е. равно 2^n.

Итак, установлен весьма важный факт: *множество, состоящее из n элементов, имеет в точности 2^n подмножеств* (включая пустое и исходное множества).

§ 10. Перестановки, размещения и сочетания

1. *Перестановки.* Одна из наиболее распространенных комбинаторных задач такова: сколькими способами можно переставить элементы некоторого конечного множества? Например, сколько

девятизначных чисел с различными цифрами можно составить из цифр $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$?

При каждой перестановке n-элементного множества образуется упорядоченный набор длины n, все элементы которого различны. Число всех возможных перестановок в данном множестве совпадает с числом всех таких наборов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Перестановкой из n элементов*** *называется упорядоченный набор длины n с различными элементами, взятыми из некоторого n-элементного множества.*

Число перестановок из n элементов обозначают P_n. Выведем формулу для вычисления P_n.

Пусть некоторое множество M состоит из n элементов. Рассмотрим произвольную перестановку элементов этого множества, т. е. упорядоченный набор $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, где $a_i \in M$. Элемент a_1 в этом наборе можно выбрать n различными способами (взять любой элемент из множества M); элемент a_2 выбирается $n-1$ способами (так как один элемент уже использован для a_1, а элементы в перестановке не повторяются); a_3 выбирается $n-2$ способами («заняты» два элемента) и т. д. Последний элемент a_n можно выбрать только одним способом. По правилу произведения, имеется всего $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$ указанных наборов.

Произведение $1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-2) \cdot (n-1) \cdot n$, где n — натуральное число, большее 1, называется ***n-факториал*** и обозначается $n!$ Дополнительно полагают $1! = 0! = 1$.

Таким образом, $\boxed{P_n = n!}$.

Получена формула *числа перестановок из n элементов*. Применяя эту формулу, можно, в частности, получить, что из цифр $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ можно составить $9!$, т. е. 362880, девятизначных чисел с различными цифрами.

2. *Размещения.* Другой важный тип комбинаторной задачи можно продемонстрировать на следующем примере: сколькими способами из 10 учебных предметов можно составить расписание занятий на один день, включив в него 4 различных предмета? Очевидно, что один вариант расписания может отличаться от другого как предметами, так и порядком их следования. Поэтому данную задачу можно сформулировать так: сколько существует упорядоченных наборов длины 4 с различными элементами,

взятыми из 10-элементного множества? Число всех таких наборов называется *числом размещений* из 10 элементов по 4.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Размещением из n элементов по m элементов*** $(m \leq n)$ *называется упорядоченный набор длины m с различными элементами, взятыми из некоторого n-элементного множества.*

Еще раз напомним, что упорядоченные наборы с одними и теми же элементами, но разным порядком их следования считаются различными. Обозначим число размещений из n элементов по m через A_n^m и выведем формулу для вычисления A_n^m.

Рассмотрим n-элементное множество M и произвольный упорядоченный набор $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$, где $a_i \in M$ и $a_i \neq a_j$ для всех $i, j = 1, 2, \ldots, m$. Элемент a_1 выбирается n различными способами; a_2 выбирается $n-1$ способами и т. д. Последний элемент a_m можно выбрать $n-(m-1)$, т. е. $n-m+1$, способами. По правилу произведения, имеется всего $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-m+1)$ указанных наборов. Искомая формула имеет вид:

$$\boxed{A_n^m = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-m+1)}. \qquad (1)$$

Заметим, что произведение в правой части состоит в точности из m множителей. Это облегчает применение формулы.

Вернемся к задаче о расписании. Число всех вариантов расписания можно посчитать по формуле (1): $A_n^m = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040$.

Имеет место другая формула для A_n^m:

$$\boxed{A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}}.$$

Для ее вывода достаточно преобразовать правую часть формулы (1).

3. *Сочетания.* Рассмотрим теперь такую задачу: сколькими способами можно из 10 учебных предметов выбрать 4 для составления расписания на день? Заметим, что в этой задаче, в отличие от задачи предыдущего пункта, не требуется составлять расписание, т. е. упорядочивать предметы. Нужно узнать, сколькими способами из множества, состоящего из 10 элементов, можно выбрать четырехэлементное подмножество (а не упорядоченный

набор). Число таких подмножеств называют *числом сочетаний из* 10 *элементов по* 4.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Сочетанием из n элементов по m*** *($m \leq n$) называется m-элементное подмножество n-элементного множества.*

Подчеркнем, что в данном случае не различаются подмножества, состоящие из одних и тех же элементов, в каком бы порядке эти элементы ни перечислялись.

Число сочетаний из n элементов по m обозначают C_n^m. Выведем формулу для нахождения этого числа.

Пусть дано множество из n элементов. Возьмем произвольное m-элементное подмножество этого множества и составим из него все возможные упорядоченные наборы. Их будет $m!$. Проделав такое действие с каждым подмножеством, получим множество всех упорядоченных наборов длины m, т. е. всех размещений из n элементов по m. Их количество можно найти по формуле $A_n^m = \dfrac{n!}{(n-m)!}$. Таким образом, $\dfrac{n!}{(n-m)!} = C_n^m \cdot m!$. Отсюда

$$\boxed{C_n^m = \frac{n!}{m! \cdot (n-m)!}}.$$

Применив полученную формулу, найдем C_{10}^4:

$C_{10}^4 = \dfrac{10!}{4! \cdot 6!} = \dfrac{7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 210$. Число 210 дает ответ задачи, поставленной в начале этого пункта.

§ 11. Треугольник Паскаля и бином Ньютона*

1. ***Свойства сочетаний.*** Рассмотрим некоторые свойства сочетаний.

***Свойство* 1.** $C_n^0 = C_n^n = 1$; $C_n^1 = n$.

Справедливость первых двух равенств следует из того, что из n-элементного множества можно единственным образом выбрать 0 элементов (пустое множество), а также единственным образом

*Блез Паскаль (1623–1662) — французский математик и физик, один из создателей теории вероятностей. Исаак Ньютон (1643–1727) — великий английский математик, физик, философ.

выбрать n элементов (взяв все множество). Последнее равенство справедливо, поскольку из n-элементного множества один элемент можно выбрать n способами.

***Свойство* 2.** $C_n^m = C_n^{n-m}$.

Это свойство справедливо, поскольку количество способов выбрать m элементов из n элементов совпадает с количеством способов *не выбирать* $n-m$ элементов из n элементов.

***Свойство* 3.** Если $n, m \geq 1$, то $C_n^m = C_{n-1}^{m-1} + C_{n-1}^m$.

Из n-элементного множества m элементов можно выбрать C_n^m способами. Подсчитаем это количество другим методом. Рассмотрим множество A, состоящее из n элементов. Пусть $a \in A$. Количество m-элементных подмножеств множества A, содержащих a, равно C_{n-1}^{m-1} (поскольку один элемент уже выбран, нужно выбрать еще $m-1$ элементов из $n-1$). А количество m-элементных подмножеств множества A, не содержащих a, равно C_{n-1}^m (поскольку элемент a не выбирается, нужно выбрать m элементов из $n-1$). Но мы выбрали все m-элементные подмножества n-элементного множества, т. е. $C_n^m = C_{n-1}^{m-1} + C_{n-1}^m$.

Свойства 1–3 могут быть доказаны также при помощи полученной формулы для вычисления числа сочетаний C_n^m.

***Свойство* 4.** $C_0^n + C_n^1 + \cdots + C_n^n = 2^n$.

В самом деле, сумма в левой части дает число *всех* подмножеств данного множества. Согласно примеру 2 из § 9, это число равно 2^n.

Ниже это свойство будет доказано также при помощи бинома Ньютона.

2. *Треугольник Паскаля.* Существует эффективный способ вычисления значений биномиальных коэффициентов при различных конкретных значениях n и m.

Выпишем в нулевой строке значение $C_0^0 = 1$. В первой строке выпишем значения C_1^0, C_1^1, т. е. числа 1, 1. Во второй строке выпишем значения C_2^0, C_2^1, C_2^2, т. е., соответственно, числа 1, 2, 1. В следующей строке будут значения C_3^0, C_3^1, C_3^2, C_3^3, — соответственно, числа 1, 3, 3, 1. Каждая последующая строка будет содержать все значения C_n^m при значениях $m = 0, 1, \ldots, n$ для $n = 4, 5, \ldots$.

Заполнение каждой строки, начиная со второй, происходит следующим образом, в соответствии со свойствами сочетаний:

1. Крайние слева и справа элементы любой строки равны 1 (свойство 1).

2. Каждый внутренний элемент строки равен сумме соседних с ним слева и справа элементов предыдущей строки (свойство 4).

Получаем следующую «фигуру» (при $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$).

$$\begin{array}{ll}
n=0 & 1 \\
n=1 & 1 \quad 1 \\
n=2 & 1 \quad 2 \quad 1 \\
n=3 & 1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\
n=4 & 1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\
n=5 & 1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1
\end{array}$$

Построен так называемый *треугольник Паскаля* для n от 0 до 5. Его построение по описанному принципу может быть продолжено как угодно далеко. В любой строке треугольника равны любые два числа, равноотстоящие от концов (по свойству 3).

Заметим, что самая верхняя строка имеет номер 0; следующая — номер 1 и т. д.; номер любой строки, начиная со второй, совпадает с числом, следующим за левой единицей. Кроме того, в любой строке с номером n сумма всех ее членов равна 2^n. Это следует из свойства 2.

Треугольник Паскаля позволяет находить любое значение C_n^m без вычислений по формуле. Например, найдем C_5^3. Для этого ищем строку, в которой после левой единицы находится число 5, затем, начиная от этого числа, отсчитываем третье; это и будет искомое значение. Таким образом, $C_5^3 = 10$.

3. *Формула бинома Ньютона.* Выведем формулу, позволяющую возводить двучлен (*бином*) $a + b$ в любую целую неотрицательную степень. Это *формула бинома Ньютона.* Она имеет следующий вид:

$$\boxed{\begin{aligned}(a+b)^n = C_n^0 \cdot a^n \cdot b^0 + C_n^1 \cdot a^{n-1} \cdot b^1 + \\ + C_n^2 \cdot a^{n-2} \cdot b^2 + \dots + C_n^{n-1} a^1 \cdot b^{n-1} + C_n^n \cdot a^0 \cdot b^n\end{aligned}} \ .$$

Докажем данную формулу индукцией по n, где $n \geq 0$.

1. Формула верна при $n = 0, 1, 2$. В самом деле, $(a+b)^0 = 1 = C_0^0$; $(a+b)^1 = a + b = C_1^0 \cdot a^1 \cdot b^0 + C_1^1 \cdot a^0 \cdot b^1$; $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = C_2^0 \cdot a^2 \cdot b^0 + C_2^1 \cdot a^1 \cdot b^1 + C_2^2 \cdot a^0 \cdot b^2$.

2. Пусть формула верна при $n = k$. Докажем ее при $n = k + 1$.

$$(a+b)^{k+1} = (a+b)^k \cdot (a+b) = \\ = \underbrace{\left(C_k^0 \cdot a^k \cdot b^0 + C_k^1 \cdot a^{k-1} \cdot b^1 + \dots + C_k^k \cdot a^0 \cdot b^k\right)}_{\text{по предположению индукции}} \cdot (a+b).$$

Раскрыв скобки и сгруппировав слагаемые по степеням a, получим:

$$(a+b)^{k+1} = C_k^0 \cdot a^{k+1} \cdot b^0 + \\ + (C_k^0 + C_k^1) \cdot a^k \cdot b^1 + \dots + (C_k^{k-1} + C_k^k) \cdot a^1 \cdot b^k + C_k^k \cdot a^0 \cdot b^{k+1}.$$

С учетом свойства 3 и того, что $C_k^0 = C_{k+1}^0 = 1$ и $C_k^k = C_{k+1}^{k+1} = 1$, имеем:

$$(a+b)^{k+1} = C_{k+1}^0 \cdot a^{k+1} \cdot b^0 + C_{k+1}^1 \cdot a^k \cdot b^1 + \dots + C_{k+1}^k \cdot a^1 \cdot b^k + C_{k+1}^{k+1} \cdot a^0 \cdot b^{k+1}.$$

Итак, индукция завершена, значит, истинность формулы доказана. ■

В формуле бинома Ньютона для $(a+b)^n$ сумма степеней a и b в каждом слагаемом равна n. Числа $C_n^0, C_n^1, \dots, C_n^n$ называются *биномиальными коэффициентами*. При вычислении биномиальных коэффициентов удобно применять треугольник Паскаля.

В качестве примера найдем: а) $(a+b)^5$; б) $(x^2-1)^4$:

$$\text{а) } (a+b)^5 = C_5^0 \cdot a^5 \cdot b^0 + C_5^1 \cdot a^4 \cdot b^1 + \\ + C_5^2 \cdot a^3 \cdot b^2 + C_5^3 \cdot a^2 \cdot b^3 + C_5^4 \cdot a^1 \cdot b^4 + C_5^5 \cdot a^0 \cdot b^5 = \\ = a^5 + 5a^4b^1 + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5;$$

$$\text{б) } (x^2-1)^4 = (x^2)^4 \cdot (-1)^0 + 4(x^2)^3 \cdot (-1)^1 + \\ + 6(x^2)^2 \cdot (-1)^2 + 4(x^2)^1 \cdot (-1)^3 + (x^2)^0 \cdot (-1)^4 = \\ = x^8 - 4x^6 + 6x^4 - 4x^2 + 15x^4 + 1.$$

Легко убедиться, что хорошо известные формулы сокращенного умножения для $(a+b)^2$ и $(a+b)^3$ представляют собой частные случаи формулы бинома Ньютона.

При помощи формулы бинома Ньютона можно доказать свойство 4 из начала параграфа. А именно, в формуле

$$(a+b)^n = C_n^0 \cdot a^n \cdot b^0 + C_n^1 \cdot a^{n-1} \cdot b^1 + \\ + C_n^2 \cdot a^{n-2} \cdot b^2 + \cdots + C_n^{n-1} a^1 \cdot b^{n-1} + C_n^n \cdot a^0 \cdot b^n$$

положим $a = b = 1$. Получим:

$$2^n = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^{n-1} + C_n^n,$$

что и требовалось.

ГЛАВА 3
Отображения и бинарные отношения

§ 12. Бинарные отношения и их свойства

1. ***Примеры и способы задания бинарных отношений.*** Элементы множеств, рассматриваемых в математике, могут находиться в некоторых связях, или, иначе говоря, *отношениях*. Так, например, из двух действительных чисел одно может быть *больше* другого, одно натуральное число может *делиться* на другое; две прямые на плоскости могут быть параллельными или перпендикулярными (находиться в отношении *параллельности* или *перпендикулярности*). Две фигуры могут быть равными по площади, подобными, конгруэнтными.

Надо заметить, что отношения между элементами множеств изучаются не только в математике, но и в других науках. В обществе между людьми могут быть, например, родственные или деловые отношения.

Из всех видов возможных отношений наиболее важными являются *бинарные отношения*, т. е. отношения, в которых могут находиться (или не находиться) любые два элемента одного множества.

Тот факт, что два элемента x и y множества находятся между собой в некотором отношении, записывают часто так: $x\rho y$. Читается: «элемент x находится в бинарном отношении ρ с элементом y». Здесь ρ — символ бинарного отношения. То, что x и y не находятся в отношении ρ, будем обозначать: $\overline{x\rho y}$.

Для некоторых известных отношений употребляются специальные символы: $=$, $>$, $\leq$, $\geq$, $\equiv$, $\perp$, $\parallel$ и другие. Например, $2 = 2$, $3{,}5 \leq 4$, $\overline{-2 > 0}$.

Бинарное отношение можно задать, перечислив все пары элементов, которые находятся в данном отношении. Сделать это возможно, если количество этих пар конечно, более того, не является очень большим. В случае бесконечного или очень большого числа соответствующих пар бинарное отношение задают характеристическим свойством.

График любой числовой функции определяет бинарное отношение на множестве действительных чисел: число x находится

в этом отношении с элементом y, если точка $(x; y)$ принадлежит графику данной функции. Фактически можно говорить еще об одном способе задания бинарных отношений — *графическом*.

Еще один наглядный способ представления бинарных отношений на конечных множествах — с помощью *графов*. Граф отношения строится следующим образом. Изобразим элементы множества, на котором задано наше бинарное отношение, точками плоскости и каждой паре $(x; y)$ поставим в соответствие *ориентированное ребро*, т. е. линию со стрелкой, ведущей из точки x в точку y, если элемент x находится в отношении с y. Если элемент x находится в отношении с x, то проведем на плоскости *петлю*.

Таким образом, мы получим граф отношения (см. рис. 10).

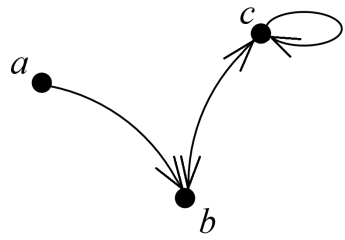


Рис. 10

Обратим внимание на то, что о каком бы способе задания бинарного отношения мы ни говорили, всегда шла речь о каком-то множестве упорядоченных пар, которое образует подмножество декартова произведения некоторых множеств. В соответствии с этим и дается общее определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Пусть A и B — произвольные множества. Всякое подмножество $\rho \subset A \times B$ называется* ***бинарным отношением*** *между элементами множеств A и B.*

В частности, любое подмножество $\rho \subset A \times A$ называют *бинарным отношением на множестве A*.

2. *Свойства бинарных отношений.* Будем в дальнейшем рассматривать свойства бинарных отношений, заданных на некотором множестве A.

Бинарное отношение ρ на множестве A называется ***рефлексивным***, если для каждого x из A имеет место $x\rho x$. Символически: $(\forall x \in A)(x\rho x)$.

Примерами рефлексивных отношений являются отношения делимости на множестве целых чисел, равенства фигур, подобия треугольников, одинаковой направленности векторов в пространстве, включения множеств. Действительно, любое целое число делится на себя, всякая фигура равна себе, любой треугольник подобен себе, любой вектор имеет одинаковое направление с собой, всякое множество является подмножеством самого себя. Отношение «больше» на любом числовом множестве не является рефлексивным, так как утверждение, что любое число больше самого себя, является, конечно, ложным.

Бинарное отношение ρ на множестве A называется ***антирефлексивным***, если для каждого x из A выполняется $\overline{x\rho x}$. Символически: $(\forall x \in A)(\overline{x\rho x})$.

Примерами антирефлексивных отношений являются отношение «больше» на множестве целых чисел, перпендикулярность прямых на плоскости, отношение неравенства чисел.

Бинарное отношение ρ на множестве A называется ***транзитивным***, если для любых $x, y, z \in A$ из того, что $x\rho y$ и $y\rho z$, следует $x\rho z$. Символически: $(\forall x, y, z \in A)(x\rho y \wedge y\rho z \to x\rho z)$.

Примерами транзитивных отношений являются отношения параллельности прямых на плоскости, подобия фигур, равенство, отношение включения множеств, отношения $<$, $\leq$ на числовых множествах, делимость на множестве натуральных чисел и другие. Отношение $\perp$ на множестве прямых пространства транзитивным не является. В самом деле, можно привести такие три прямые в пространстве, что первая перпендикулярна второй и вторая перпендикулярна третьей, но первая не перпендикулярна третьей*.

Бинарное отношение ρ на множестве A называется ***симметричным***, если для любых $x, y \in A$ из того, что $x\rho y$, следует, что $y\rho x$. Символически: $(\forall x, y \in A)(x\rho y \to y\rho x)$.

Примерами симметричных отношений являются отношения равенства на любом множестве, подобия на множестве плоских фигур, параллельности на множестве прямых пространства. Отношения $<$, $\leq$ на множестве рациональных чисел, $\subset$ на множестве всех подмножеств фиксированного множества A, делимость целых чисел симметричными не являются.

---

*Обратим внимание, что для доказательства нетранзитивности отношения достаточно привести контрпример в соответствии с правилом из § 4.

Бинарное отношение ρ на множестве A называется ***антисимметричным***, если для любых $x, y \in A$ из того, что $x\rho y$ и $y\rho x$, следует, что $x = y$. Символически: $(\forall x, y \in A)(x\rho y \wedge y\rho x \to x = y)$. Примерами антисимметричных отношений являются отношения $\subset$ на множестве всех подмножеств фиксированного множества A, $\geq$ на множестве рациональных чисел, делимость на множестве натуральных чисел.

Бинарное отношение ρ на множестве A называется ***связным***, если для любых неравных элементов x, y хотя бы один из элементов находится в данном отношении с другим. Символически это выглядит так: $(\forall x, y \in A)(x \neq y \to x\rho y \vee y\rho x)$.

Примерами связных отношений являются отношения $>$, $\geq$ на множестве действительных чисел. Отношения $\subset$ на множестве всех подмножеств фиксированного множества A, делимость на множестве натуральных чисел связными не являются.

§ 13. Отношение эквивалентности

Рассматривая примеры бинарных отношений в предыдущем параграфе, можно было заметить, что некоторые из них обладают несколькими из перечисленных свойств. Наиболее важные из таких отношений имеют специальные названия.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Бинарное отношение называется* ***отношением эквивалентности****, если оно рефлексивно, симметрично и транзитивно.*

Примерами отношений эквивалентности являются равенство целых чисел, подобие фигур, одинаковая направленность векторов, отношение сравнимости целых чисел по некоторому модулю.

Для дальнейшего введем два важных понятия.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. *Пусть A — некоторое множество и $\mathfrak{M}$ — система подмножеств множества A. Тогда $\mathfrak{M}$ называется* ***разбиением множества A****, если все элементы множества $\mathfrak{M}$ непусты и каждый элемент множества A принадлежит в точности одному подмножеству из множества $\mathfrak{M}$.*

Перепишем это определение в форме, удобной для практического использования.

$\mathfrak{M}$ — разбиение множества A, если:

1) $(\forall K \in \mathfrak{M})(K \neq \varnothing)$; 2) $\bigcup\limits_{K \in \mathfrak{M}} K = A$;

3) $(\forall K, L \in \mathfrak{M})(K \cap L \neq \varnothing \to K = L)$.

Элементы множества $\mathfrak{M}$, т. е. элементы разбиения, называются *классами* разбиения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. *Пусть $x \in A$, ρ — отношение эквивалентности на A. Тогда* ***классом эквивалентности, порожденным элементом x****, называется множество $[x] = \{y \in A | x\rho y\}$.*

Словесная формулировка: *класс эквивалентности, порожденный элементом x,* — это множество $[x]$ всех элементов множества A, находящихся с x в данном отношении ρ.

Иногда класс эквивалентности по отношению ρ обозначают $[x]_\rho$.

Примеры: один класс по соответствующему отношению эквивалентности составляют треугольники, подобные данному треугольнику; прямые, параллельные фиксированной прямой; векторы, имеющие одинаковое направление с выбранным вектором.

В следующих двух очень важных для всей математики теоремах устанавливается тесная связь между двумя введенными понятиями: разбиения множества и отношения эквивалентности.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть ρ — отношение эквивалентности на множестве A, $\mathfrak{M} = \{[x] \mid x \in A\}$. Тогда $\mathfrak{M}$ — разбиение множества A.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Пусть $x \in A$ — произвольный элемент. Так как ρ — рефлексивное отношение, то $x\rho x$. Последнее означает, что $x \in [x]$ и, значит, $[x] \neq \varnothing$.

2) Из предыдущего пункта доказательства легко следует, что объединение всех классов эквивалентности совпадает со всем множеством A. Действительно, принадлежность элемента x классу $[x]$ означает, что каждый элемент множества A принадлежит некоторому классу, следовательно, все элементы множества принадлежат объединению всех классов. Короче, $A \subset \bigcup\limits_{x \in A} [x]$. Обратное включение очевидно.

3) Пусть $[x] \cap [y] \neq \varnothing$ и $z \in [x] \cap [y]$. Это означает, что $z \in [x]$ и $z \in [y]$. Это, в свою очередь, по определению означает, что $x\rho z$ и $y\rho z$. Из последнего, в силу симметричности ρ, следует, что $z\rho y$. В силу транзитивности ρ, из $x\rho z$ и $z\rho y$ следует $x\rho y$.

Пусть теперь $t \in [x]$ — произвольный элемент, т. е. $x\rho t$. Из $y\rho x$ и $x\rho t$ следует $y\rho t$, т. е. $t \in [y]$. В силу произвольности t, мы доказали включение $[x] \subset [y]$. Аналогично доказывается обратное включение, из чего следует, что $[x] = [y]$.

Все три условия определения разбиения выполнены, следовательно, $\mathfrak{M}$ — разбиение множества A. ■

ТЕОРЕМА 2. *Пусть $\mathfrak{M}$ — разбиение множества A. Определим на множестве A бинарное отношение ρ следующим образом: $x\rho y \Leftrightarrow (\exists K \in \mathfrak{M})(x \in K \wedge y \in K)$. Тогда ρ — отношение эквивалентности.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) То, что отношение ρ является рефлексивным, следует из того, что любой элемент множества A попадает в некоторый класс разбиения.

2) Пусть x и y — произвольные элементы множества A, такие, что $x\rho y$. Другими словами, есть такой класс K разбиения $\mathfrak{M}$, что $x \in K \wedge y \in K$. Из коммутативности конъюнкции следует, что $y \in K \wedge x \in K$, т. е. $y\rho x$. Это доказывает симметричность введенного отношения ρ.

3) Пусть x, y, z — произвольные элементы множества A, такие, что $x\rho y$ и $y\rho z$. Это означает, что есть такие классы K_1 и K_2 из разбиения $\mathfrak{M}$, что $x, y \in K_1$ и $y, z \in K_2$. Заметим, что элемент y принадлежит обоим классам K_1 и K_2, а следовательно, и их пересечению. Но так как различные классы разбиения не пересекаются, то $K_1 = K_2$.

Итак, нашелся класс разбиения, которому принадлежат элементы x и z, т. е. $x\rho z$. Этим доказана транзитивность нашего отношения. ■

Теорема 1 показывает, что всякому отношению эквивалентности соответствует разбиение множества, на котором задано это отношение. Теорема 2, фактически являясь обратной теореме 1, показывает, что всякому разбиению исходного множества соответствует отношение эквивалентности, заданное на этом множестве.

Если ρ — отношение эквивалентности на множестве A и $\mathfrak{M}$ — соответствующее разбиение множества A, то $\mathfrak{M}$ называется *фактор-множеством* множества A по отношению ρ.

Обозначение: $A/_\rho$.

Пример. Найти фактор-множество $\mathbb{Z}/_{\rho}$, где отношение ρ на $\mathbb{Z}$ определено правилом: $x\rho y \Leftrightarrow$ числа x и y имеют одинаковые остатки при делении на 3.

Легко убедиться, что отношение ρ рефлексивно, симметрично и транзитивно, т. е. является отношением эквивалентности. Ясно, что целые числа a и b лежат в одном классе эквивалентности тогда и только тогда, когда они имеют одинаковые остатки при делении на 3. Поскольку всего существует три различных остатка при делении на 3, то $\mathbb{Z}/_{\rho} = \{[0], [1], [2]\}$, где

$$\begin{aligned}
[0] &= \{\dots, -6, -3, 0, 3, 6, \dots\},\\
[1] &= \{\dots, -5, -2, 1, 4, 7, \dots\},\\
[2] &= \{\dots, -4, -1, 2, 5, 8, \dots\}.
\end{aligned}$$

Как легко заметить, $[3] = [0]$, $[4] = [1]$, $[5] = [2]$ и т. д. Кроме того, очевидно, что $\mathbb{Z} = [0] \cup [1] \cup [2]$.

§ 14. Отношение порядка

Следующим важным бинарным отношением в математике является отношение порядка.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Бинарное отношение ρ на множестве A называется* ***отношением порядка на A*** (*порядком на A*), *если оно транзитивно и антисимметрично;* ***отношением нестрогого порядка на A*** (*нестрогим порядком на A*), *если оно рефлексивно, транзитивно и антисимметрично;* ***отношением строгого порядка на A*** (*строгим порядком на A*), *если оно антирефлексивно, транзитивно и антисимметрично.*

Примеры: $<$ — строгий порядок на множестве действительных чисел; $\leq$ — нестрогий порядок на множестве действительных чисел; включение множеств на совокупности подмножеств фиксированного множества — нестрогий порядок; делимость — нестрогий порядок на множестве натуральных чисел.

В качестве несложного упражнения читателю предлагается выяснить, является ли отношением порядка отношение делимости на множестве целых чисел.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. *Отношение порядка на множестве A называется* ***отношением линейного порядка*** *(линейным порядком на A), если оно связно на A.*

Примерами отношений линейного порядка являются отношения $\leq$, $>$ на множестве действительных чисел. Примеры отношений порядка, не являющихся линейными: делимость на множестве натуральных чисел; включение на множестве подмножеств данного множества A, содержащего не менее двух элементов.

Множество с заданным на нем отношением порядка называется ***упорядоченным множеством***. Обозначение: $\langle A; \prec \rangle$, где A — множество, $\prec$ — отношение порядка на множестве A.

Если порядок, заданный на множестве, является линейным, то говорят о *линейно упорядоченном множестве.*

Пусть $\langle A; \prec \rangle$ — упорядоченное множество. Элемент $a \in A$ называется ***наименьшим*** **(*наибольшим*)** в A, если $a \prec x$ ($x \prec a$) для любого элемента x из A, отличного от a. Элемент $a \in A$ называется ***минимальным*** **(*максимальным*)** в A, если из того, что $x \prec a$, следует, что $x = a$ (из того, что $a \prec x$, следует, что $x = a$). Максимальные и минимальные элементы называют *экстремальными.*

В качестве примера рассмотрим отношение $\subset$ на множестве A, состоящем из всех непустых подмножеств множества $\{a, b, c\}$. Легко видеть, что $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$ — минимальные элементы упорядоченного множества $\langle A; \prec \rangle$; наименьшего элемента это упорядоченное множество не имеет; $\{a, b, c\}$ — максимальный и в то же время наибольший элемент.

В линейно упорядоченном множестве понятия наименьшего и минимального элементов, а также наибольшего и максимального элементов совпадают.

§ 15. Отображения. Виды отображений

Понятие *отображения* играет центральную роль в математике.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Пусть A и B — непустые множества.* ***Отображением множества A во множество B*** *называется правило, сопоставляющее каждому элементу $a \in A$ некоторый элемент $b \in B$.*

Обозначение: $f : A \to B$, $A \xrightarrow{f} B$.

Элемент b называется *образом элемента a* и обозначается $f(a)$, а элемент a называется *прообразом элемента b*. Сопоставление элементу $a \in A$ его образа $f(a) \in B$ обозначается при помощи ограниченной стрелки: $a \mapsto f(a)$.

Множество всех образов элементов множества A при отображении $f : A \to B$ называется ***образом при отображении f*** и обозначается $\mathrm{Im} f$ или $f(A)$. Символически: $f(A) = \{f(x) \,|\, x \in A\}$. Ясно, что $f(A) \subset B$.

Множество всех элементов $a \in A$, являющихся прообразом фиксированного элемента $b \in B$, называется ***прообразом элемента b*** и обозначается $f^{-1}(b)$. Символически можно записать: $f^{-1}(b) = \{a \in A \,|\, f(a) = b\}$.

Если $B_0 \subset B$ и $B_0 \neq \varnothing$, то можно определить ***прообраз множества B_0***, положив $f^{-1}(B_0) = \{a \in A \,|\, f(a) \in B_0\}$. Легко видеть, что $f^{-1}(B_0) = \bigcup\limits_{b \in B_0} f^{-1}(b)$.

Более общим, чем понятие «отображение», является понятие «функция». Если при задании отображения $f : A \to B$ у каждого элемента множества A есть образ, то при задании функции $f : A \to B$ образ может существовать не для каждого элемента из A. Поэтому для функции f вводится понятие *области определения* $D(f)$, т. е. такого множества элементов $a \in A$, для каждого из которых функция определена. При этом множество $E(f) = \{f(a) | a \in D(f)\}$ называют *множеством значений* f.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. *Отображение $f : A \to B$ называется* ***сюръективным*** (***сюръекцией****, или отображением множества A* ***на*** *множество B), если $\mathrm{Im} f = B$, т. е. если любой элемент множества B имеет прообраз во множестве A при отображении f.*

Примером сюръективного отображения может служить отображение $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, определенное правилом $x \mapsto \sqrt{x}$. Действитель-

но, из любого положительного действительного числа можно извлечь арифметический квадратный корень, который снова будет действительным положительным числом, поэтому $\mathrm{Im} f = \mathbb{R}^+$.

Отображение $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, заданное правилом $x \mapsto x^2$, не будет сюръективным, поскольку $\mathrm{Im} f = \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \neq \mathbb{R}$.

Заметим, что всякое отображение $f : A \to B$ можно рассматривать как сюръективное отображение A на $f(A)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. *Отображение $f : A \to B$ называется* ***инъективным****, или* ***инъекцией****, если из того, что $x_1 \neq x_2$, следует, что $f(x_1) \neq f(x_2)$ для всех $x_1, x_2 \in A$, т. е. различные элементы множества A имеют различные образы во множестве B при отображении f.*

Отображение $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, заданное правилом $x \mapsto \sqrt{x}$, является инъективным, поскольку арифметические квадратные корни из различных положительных чисел всегда различны. Отображение $f : \mathbb{R} \to [-1; 1]$, заданное правилом $x \mapsto \cos x$, не инъективно (хотя и является сюръективным!), поскольку для каждого $x \in \mathbb{R}$ при всех $k \in \mathbb{Z}$ выполняется: $\cos x = \cos(x + 2\pi k)$.

Определение 3 может быть переформулировано следующим образом: отображение $f : A \to B$ называется инъективным, если для всех $x_1, x_2 \in A$ из того, что $f(x_1) = f(x_2)$, следует, что $x_1 = x_2$. Другими словами, совпадение образов любых двух элементов при отображении f влечет совпадение самих элементов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. *Отображение $f : A \to B$ называется* ***биективным*** (***биекцией****, или* ***взаимно однозначным***)*, если оно является одновременно сюръективным и инъективным.*

Согласно сформулированному определению, рассмотренное ранее отображение $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, заданное правилом $x \mapsto \sqrt{x}$, является биекцией. Любое отображение, не являющееся либо инъективным, либо сюръективным, биекцией не является.

Отображения $f : A \to B$ и $g : A' \to B'$ называют *равными*, если $A = A'$, $B = B'$ и $f(x) = g(x)$ для всех $x \in A$.

Единичным, или *тождественным*, отображением $e_A : A \to A$ называется отображение, переводящее каждый элемент $a \in A$ в себя, т. е. $e_A(a) = a$ для всех $a \in A$. Если $A \subset B$, то отображение

$I : A \to B$, которое каждому элементу $a \in A$ сопоставляет тот же самый элемент, но уже во множестве B, называется *вложением.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. ***Произведением*** (***суперпозицией***, *или* ***композицией***) *отображений* $g : A \to B$ *и* $f : B \to C$ *называется отображение* $h : A \to C$, *определенное условием:* $h(x) = f(g(x))$ *для всех* $x \in A$.

Обозначение: $h = f \circ g$.

Очевидно, что для любого отображения $f : A \to B$ справедливы равенства $f \circ e_A = f$ и $e_B \circ f = f$.

В дальнейшем для краткости вместо $f \circ g$ будем писать просто fg.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть даны отображения* $h : A \to B$, $g : B \to C$ *и* $f : C \to D$. *Тогда* $f(gh) = (fg)h$, *т. е. композиция отображений подчиняется закону ассоциативности.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $a \in A$ — произвольный элемент. Сравним значения отображений $f(gh) : A \to D$ и $(fg)h : A \to D$ на элементе a:

$$(f(gh))(a) = f((gh)(a)) = f(g(h(a))) = (fg)(h(a)) = ((fg)h)(a).$$

В силу произвольности $a \in A$ соотношение $f(gh) = (fg)h$ справедливо для всех элементов из A. ■

Композиция отображений множества A в себя, вообще говоря, некоммутативна, т. е. $fg \neq gf$.

Пусть, например, $A = \{a, b\}$ — двухэлементное множество, отображения $f : A \to A$, $g : A \to A$ заданы правилами:

$$f(a) = b, \qquad f(b) = a, \qquad g(a) = a, \qquad g(b) = a.$$

Тогда $(fg)(a) = f(g(a)) = f(a) = b$, но $(gf)(a) = g(f(a)) = g(b) = a$, т. е. $(fg)(a) \neq (gf)(a)$ и $fg \neq gf$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. *Пусть* $f : A \to B$ *и* $g : B \to A$ — *такие отображения, что композиции* fg *и* gf *определены. Если*

$$fg = e_B \quad \text{и} \quad gf = e_A, \tag{1}$$

то g называется ***обратным*** *отображением для f (а f — обратным отображением для g).*

Предположим, что, помимо отображения g из определения 6, найдется такое отображение $g' : B \to A$, что

$$fg' = e_B \quad \text{и} \quad g'f = e_A. \tag{2}$$

Тогда при помощи равенств (1), (2) и теоремы 1 получим:

$$g' = e_A g' = (gf)g' = g(fg') = ge_B = g.$$

Таким образом, обратное для f отображение, если оно существует, определяется единственным образом.

Обозначение: f^{-1}.

Пример. Пусть отображение $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ задано правилом $f(x) = 2x + 1$. Ясно, что f биективно. Построим отображение f^{-1}, обратное к f.

Выражая x через y из равенства $y = 2x+1$, получим: $x = \dfrac{y-1}{2}$. Тогда отображение $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, заданное правилом $g(y) = \dfrac{y-1}{2}$, является обратным к f. В самом деле,

$$(gf)(x) = g(f(x)) = g(2x+1) = \frac{(2x+1)-1}{2} = x,$$

т. е. $gf = e_{\mathbb{R}}$.

$$(fg)(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{x-1}{2}\right) = 2 \cdot \left(\frac{x-1}{2}\right) + 1 = x,$$

т. е. $fg = e_{\mathbb{R}}$.

ЛЕММА. *Если $f : A \to B$ и $g : B \to A$ — такие отображения, что $gf = e_A$, то f инъективно, а g сюръективно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $a, b \in A$ и $f(a) = f(b)$. Тогда

$$a = e_A(a) = (gf)(a) = g(f(a)) = g(f(b)) = (gf)(b) = e_A(b) = b,$$

т. е. f инъективно по определению.

Пусть теперь $a \in A$. Тогда

$$a = e_A(a) = (gf)(a) = g(f(a)),$$

т. е. произвольный элемент a имеет прообраз $g(f(a))$ при отображении $g : B \to A$ и g сюръективно. ■

ТЕОРЕМА 2. *Отображение $f : A \to B$ имеет обратное тогда и только тогда, когда оно взаимно однозначно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть отображение f имеет обратное отображение $g = f^{-1}$. Тогда по определению выполняются равенства (1). Поскольку $fg = e_B$, то по лемме f инъективно. Поскольку $gf = e_A$, то по лемме f сюръективно. Таким образом, f — биекция.

Обратно, пусть отображение f биективно. Тогда для любого $b \in B$ существует единственный элемент $a \in A$ такой, что $f(a) = b$, а значит, можно определить отображение $g : B \to A$, заданное правилом $g(b) = a$. Получим, что $(fg)(b) = f(g(b)) = f(a) = b$, т. е. $fg = e_B$ в силу произвольности $b \in B$. Аналогично доказывается, что $gf = e_A$. Следовательно, $f^{-1} = g$. ■

СЛЕДСТВИЕ. *Если отображение $f : A \to B$ биективно, то отображение $f^{-1} : B \to A$ также биективно, причем $(f^{-1})^{-1} = f$. Если далее отображения $f : A \to B$ и $h : B \to C$ биективны, то отображение hf также биективно, причем $(hf)^{-1} = f^{-1}h^{-1}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку f биективно, то для него существует обратное отображение f^{-1}. Поскольку $ff^{-1} = e_B$ и $f^{-1}f = e_A$, то отображение f по определению является обратным для f^{-1}, т. е. f^{-1} — биекция по теореме 2. Далее, тот факт, что отображение f является обратным для f^{-1}, записывается символически как $(f^{-1})^{-1} = f$.

Пусть далее $f : A \to B$ и $h : B \to C$ — биективные отображения. Тогда $hf : A \to C$ — их композиция. По теореме 2 существуют отображения $f^{-1} : B \to A$, $h^{-1} : C \to B$ и $f^{-1}h^{-1}C \to A$. Поскольку

$$\begin{aligned}(hf)(f^{-1}h^{-1}) &= ((hf)f^{-1})h^{-1} = \\ &= (h(ff^{-1}))h^{-1} = (he_A)h^{-1} = hh^{-1} = e_C, \\ (f^{-1}h^{-1})(hf) &= f^{-1}(h^{-1}(hf)) = \\ &= f^{-1}((h^{-1}h)f) = f^{-1}(e_Cf) = f^{-1}f = e_A,\end{aligned}$$

то отображение $f^{-1}h^{-1}$ является обратным для hf. Другими словами, $(hf)^{-1} = f^{-1}h^{-1}$.

Поскольку отображение hf имеет обратное, то оно биективно по теореме 2. ■

Следует помнить, что в общем случае инъективность отображения не всегда влечет его сюръективность. Например, рассмотрим множество $\mathbb{N}$, а в качестве отображения множества $\mathbb{N}$ в себя рассмотрим непосредственное следование натуральных чисел (изученное в § 8), задаваемое правилом $x \mapsto x + 1$. Это отображение будет являться инъективным, но не сюръективным, поскольку элемент 1 при этом отображении не будет иметь прообраза. Сюръективность отображения в свою очередь не всегда влечет его инъективность. Впрочем, для некоторых классов множеств понятия инъективности и сюръективности тесно связаны.

ТЕОРЕМА 3. *Если A — конечное множество и преобразование $f : A \to A$ инъективно, то оно биективно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно показать, что f сюръективно, т. е. для любого элемента $a \in A$ найдется такой $a' \in A$, что $f(a') = a$. Положим $f^k(a) = f(f \dots (f(a)) \dots) = f(f^{k-1}(a))$, $k = 0, 1, 2, \dots$. Ясно, что $f^k(a) \in A$ при всех $k \geq 0$. Поскольку множество A конечно, то все элементы бесконечной последовательности $a, f(a), f^2(a), \dots$ не могут быть различны, т. е. найдутся целые неотрицательные числа m и n, для которых $f^m(a) = f^n(a)$, $m > n$. Если $n > 0$, то из равенства $f(f^{m-1}(a)) = f(f^{n-1}(a))$ ввиду инъективности f следует, что $f^{m-1}(a) = f^{n-1}(a)$. Повторив указанное действие $m - n$ раз, получим, что $f^{m-n}(a) = f^0(a) = e_A(a) = a$, т. е. $f(a') = a$ для $a' = f^{m-n-1}(a)$. Получили, что f сюръективно, а значит, биективно. ■

ТЕОРЕМА 4. *Если A — конечное множество и преобразование $f : A \to A$ сюръективно, то оно биективно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно показать, что f инъективно, т. е. для любых элементов $a, b \in A$ из того, что $f(a) = f(b)$, следует, что $a = b$. Положим $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\} = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$, где $b_1, b_2, \dots, b_n$ — это элементы $a_1, a_2, \dots, a_n$, взятые в другом порядке. Поскольку f сюръективно, то каждый из элементов $a_1, a_2, \dots, a_n$ имеет прообраз. Не ограничивая общности, предположим, что $b_1 = f(a_1)$, $b_2 = f(a_2)$, $\dots$, $b_n = f(a_n)$. Пусть $f(a_i) = f(a_j)$, тогда $b_i = b_j$. Если при этом $a_i \neq a_j$, то получим, что множество $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ содержит по крайней мере на один элемент больше, чем множество $\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$, что

невозможно, поскольку эти множества совпадают. Полученное противоречие показывает, что равенство $f(a_i) = f(a_j)$ влечет за собой равенство $a_i = a_j$, т. е. f инъективно и, следовательно, биективно. ■

ИНДИВИДУАЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ № 1

Элементы математической логики

ВАРИАНТ 1

1. Определите истинность высказывания:
«Если 11 делится на 6 и 12 делится на 6, то 15 делится на 6 или 18 не делится на 12».

2. Постройте таблицу истинности для формулы:
а) $(P \to Q) \to ((P \to \overline{Q}) \to \overline{P})$; б) $\overline{A \to \overline{B \wedge A}} \to A \vee C$.

3. Проверьте равносильность следующих формул:
а) $B \vee C \to A$ и $(B \to A) \wedge (C \to A)$;
б) $X \wedge Y \to Z$ и $X \vee Y \to Z$.

4. Докажите с помощью законов логики равносильность следующих формул:
а) $(X \vee \overline{Y} \to \overline{X} \wedge Z) \wedge (Y \vee \overline{Y}) \wedge (Y \vee Z)$ и $\overline{X} \wedge (Y \vee Z)$;
б) $P \to Q \vee R$ и $(P \to Q) \wedge (P \to R)$.

5. Переформулируйте утверждение, используя законы логики: «Неверно, что треугольник ABC — прямоугольный и равнобедренный».

6. Изобразите множества истинности предикатов, заданных на множестве $\mathbb{R}$:
а) на координатной прямой; б) на координатной плоскости:

а) $(|x| < 3) \wedge (x \geq 2)$; б) $(x^2 + y^2 < 1) \to (x \cdot y < 0)$.

7. Какие из трех соотношений: $P(x) \Rightarrow Q(x)$; $Q(x) \Rightarrow P(x)$; $P(x) \Leftrightarrow Q(x)$ имеют место для предикатов $P(x)$ и $Q(x)$, заданных на множестве $\mathbb{R}$:

а) $P(x):\ |x| < 3$; $Q(x):\ x^2 - 3x + 2 = 0$;

б) $P(x):\ (2x+1) \cdot \sqrt{2x^2+5} = (3x-1) \cdot \sqrt{2x^2+5}$;
$Q(x):\ 2x + 1 = 3x - 1$?

8. Найдите множество истинности заданного на $\mathbb{R}$ предиката $P(x):\ \log_5|x|>1$.

9. Определите истинность высказывания на множестве $\mathbb{R}$; ответ обоснуйте:

   а) $(\forall x)(x^2-1=(x-1)\cdot(x+1))$; б) $(\exists y)(y^2+y+1=0)$;

   в) $(\forall x)(\exists y)\left(\dfrac{x}{y}=1\right)$.

10. Запишите с помощью логической и подходящей математической символики и постройте отрицания следующих предложений; в п. б) определите истинность высказывания и его отрицания; ответ обоснуйте:

    а) «f — четная функция»;

    б) «Существует такое натуральное число x, что для любого натурального y верно равенство $(x-x^2)\cdot y=0$».

11. Опровергните с помощью контрпримера следующие высказывания:

    а) $(\forall x)((x>0)\to(\sin x>0))$;

    б) «Равные углы вертикальны».

12. Запишите утверждение в виде всеобщего условного предложения, выделите разъяснительную часть, условие, заключение; постройте обратное, противоположное, контрапозиционное предложения; определите истинность каждого (ложные опровергните с помощью контрпримера):

    «Сумма двух четных чисел является четным числом».

13. Определите, является ли необходимым, достаточным, необходимым и достаточным условием предложение A для предложения B; предложение B для предложения A. В обоих случаях полученный результат сформулируйте, используя всевозможные подходящие термины: «если... то...»; «...достаточно...»; «...тогда, когда...»; «...необходимо...»; «...только тогда, когда...»; «...необходимо и достаточно...»; «...тогда и только тогда, когда...»:

    A: Площади данных прямоугольников равны;

B: Данные прямоугольники равны.

14. Определите, истинно ли высказывание; ответ обоснуйте:
«Для того чтобы было $|x| > 0$, достаточно, чтобы $x > 0$».

15. Поставьте вместо точек подходящее словосочетание: «…необходимо…», «…достаточно…», «…необходимо и достаточно…», чтобы получилось истинное высказывание; результат обоснуйте:

«Для того чтобы треугольник был прямоугольным, …, чтобы квадрат одной из его сторон был равен сумме квадратов других сторон».

ВАРИАНТ 2

1. Определите истинность высказывания:
«Если 2 делится на 3 и неверно, что 7 — нечетное число, то 2 не больше 3 или неверно, что 3 не делится на 2».

2. Постройте таблицу истинности для формулы:

   а) $((P \to Q) \to P) \to Q$;

   б) $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to \overline{A \wedge \overline{C}})$.

3. Проверьте равносильность следующих формул:

   а) $X \vee (Y \to \overline{Z})$ и $(X \to \overline{Z}) \vee \overline{Y}$;

   б) $(A \to B) \vee C$ и $A \wedge \overline{C} \to B$.

4. Докажите с помощью законов логики равносильность следующих формул:

   а) $(P \to Q) \wedge (P \vee Q) \to Q \wedge R$ и $\overline{Q} \vee R$;

   б) $(A \to B) \vee C$ и $A \wedge \overline{C} \to B$.

5. Переформулируйте утверждение, используя законы логики: «Неверно, что число 9 — четное или простое».

6. Изобразите множества истинности предикатов, заданных на множестве $\mathbb{R}$:

а) на координатной прямой; б) на координатной плоскости:

а) $(|x| < 3) \to (x < 2)$; б) $(x^2 + y^2 < 0) \to (x = y)$.

7. Какие из трех соотношений: $P(x) \Rightarrow Q(x)$; $Q(x) \Rightarrow P(x)$; $P(x) \Leftrightarrow Q(x)$ имеют место для предикатов $P(x)$ и $Q(x)$, заданных на множестве $\mathbb{R}$:

   а) $P(x): \ x^4 = 16$; $Q(x): \ x = -2$;

   б) $P(x): \ (x^2 - 4) \cdot (x - 2) = 0$; $Q(x): \ x^2 - 4 = 0$?

8. Найдите множество истинности заданного на $\mathbb{R}$ предиката $P(x): \ x = \sqrt{24 - 5x}$.

9. Определите истинность высказывания на множестве $\mathbb{R}$; ответ обоснуйте:

   а) $(\exists x)(|x| \leq 0)$; б) $(\forall y)(y^2 + y + 1 > 0)$;
   в) $(\forall y)(\exists x)(x \cdot y = 0)$.

10. Запишите с помощью логической и подходящей математической символики и постройте отрицания следующих предложений; в п. б) определите истинность высказывания и его отрицания; ответ обоснуйте:

    а) «f — нечетная функция»;

    б) «Для любых действительных чисел x и y существует такое действительное число z, что $x + y = z$».

11. Опровергните с помощью контрпримера следующие высказывания:

    а) $(\forall x)((x^2 > 1) \to (x > 1))$;

    б) «Четырехугольник, диагонали которого перпендикулярны, является ромбом».

12. Запишите утверждение в виде всеобщего условного предложения, выделите разъяснительную часть, условие, заключение; постройте обратное, противоположное, контрапозиционное предложения; определите истинность каждого (ложные опровергните с помощью контрпримера):

    «В параллелограмме противоположные углы равны».

13. Определите, является ли необходимым, достаточным, необходимым и достаточным условием предложение A для предложения B; предложение B для предложения A. В обоих случаях полученный результат сформулируйте, используя всевозможные подходящие термины: «если... то...»; «...достаточно...»; «...тогда, когда...»; «...необходимо...»; «...только тогда, когда...»; «...необходимо и достаточно...»; «...тогда и только тогда, когда...»:

    $A\colon x > 0; \quad B\colon x^2 > 0.$

14. Определите, истинно ли высказывание; ответ обоснуйте:
    «Для того чтобы было $\sin x > 0$, необходимо, чтобы имело место $x > 0$».

15. Поставьте вместо точек подходящее словосочетание: «...необходимо...», «...достаточно...», «...необходимо и достаточно...», чтобы получилось истинное высказывание; результат обоснуйте:

    «Для того чтобы прямые лежали в одной плоскости, ... , чтобы эти прямые были параллельны».

ВАРИАНТ 3

1. Определите истинность высказывания:
   «Если 8 делится на 7 и неверно, что 17 делится на 14 или 2 больше 3, то 18 делится на 5 и 17 не делится на 3».

2. Постройте таблицу истинности для формулы:

   а) $P \wedge (Q \vee \overline{P}) \wedge ((Q \to P) \vee Q)$;
   б) $(B \to A \wedge C) \wedge \overline{A \vee B \to C}$.

3. Проверьте равносильность следующих формул:

   а) $A \to \overline{B \wedge C}$ и $\overline{A} \vee \overline{B} \vee \overline{C}$;
   б) $X \to (Y \to Z)$ и $Y \to (X \to Z)$.

4. Докажите с помощью законов логики равносильность следующих формул:

   а) $\overline{\overline{P} \wedge \overline{Q}} \vee ((P \to Q) \wedge P)$ и $P \vee Q$;
   б) $A \wedge \overline{B} \to A$ и $A \wedge \overline{B} \to \overline{B}$.

5. Переформулируйте утверждение, используя законы логики: «Неверно, что каждое из чисел m и n четно».

6. Изобразите множества истинности предикатов, заданных на множестве $\mathbb{R}$:
а) на координатной прямой; б) на координатной плоскости:

а) $(|x| \neq 2) \wedge \left(\dfrac{x^2}{x} = x\right)$; б) $(x^2 + y^2 \geq 0) \vee \overline{|x| + |y| \leq |x + y|}$.

7. Какие из трех соотношений: $P(x) \Rightarrow Q(x)$; $Q(x) \Rightarrow P(x)$; $P(x) \Leftrightarrow Q(x)$ имеют место для предикатов $P(x)$ и $Q(x)$, заданных на множестве $\mathbb{R}$:

а) $P(x):\ (x-1)\cdot(x-2)\cdot(x+3) = 0$; $Q(x):\ x^2 + x - 6 = 0$;

б) $P(x): \dfrac{(x-4)\cdot\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+2}} > 2$; $Q(x):\ x - 4 > 2$?

8. Найдите множество истинности заданного на $\mathbb{R}$ предиката $P(x):\ x - 4 = \sqrt{x^2+1}$.

9. Определите истинность высказывания на множестве $\mathbb{R}$; ответ обоснуйте:

а) $(\exists x)(x^2 - 4x + 3 = 0)$; б) $(\forall x)(100x^2 > 27x^3)$;
в) $(\forall x)(\exists y)(2x - 1 = y \cdot x)$.

10. Запишите с помощью логической и подходящей математической символики и постройте отрицания следующих предложений; в п. б) определите истинность высказывания и его отрицания; ответ обоснуйте:

а) «f — убывающая функция»;

б) «Для любого натурального числа x найдется такое число y, что $2x + y = 1$».

11. Опровергните с помощью контрпримера следующие высказывания:

а) $(\forall x)((0,5^x > 0,125) \to (x > 3))$;

б) «Если сумма двух слагаемых кратна 3, то каждое слагаемое кратно 3».

12. Запишите утверждение в виде всеобщего условного предложения, выделите разъяснительную часть, условие, заключение; постройте обратное, противоположное, контрапозиционное предложения; определите истинность каждого (ложные опровергните с помощью контрпримера):

    «Вертикальные углы равны».

13. Определите, является ли необходимым, достаточным, необходимым и достаточным условием предложение A для предложения B; предложение B для предложения A. В обоих случаях полученный результат сформулируйте, используя всевозможные подходящие термины: «если... то...»; «...достаточно...»; «...тогда, когда...»; «...необходимо...»; «...только тогда, когда...»; «...необходимо и достаточно...»; «...тогда и только тогда, когда...»:

    A: Данный четырехугольник — параллелограмм;

    B: Две противоположные стороны данного четырехугольника равны.

14. Определите, истинно ли высказывание; ответ обоснуйте:
    «Для того чтобы сумма двух целых чисел делилась на 5, необходимо, чтобы каждое слагаемое делилось на 5».

15. Поставьте вместо точек подходящее словосочетание: «...необходимо...», «...достаточно...», «...необходимо и достаточно...», чтобы получилось истинное высказывание; результат обоснуйте:

    «Для того чтобы были равны числа, ... , чтобы были равны их модули».

ВАРИАНТ 4

1. Определите истинность высказывания:
   «Неверно, что если 8 делится на 4 и 2 больше 3, то 6 не делится на 3 или 7 — четное число».

2. Постройте таблицу истинности для формулы:

   а) $(P \wedge \overline{Q} \to Q) \to \overline{P \wedge \overline{Q}}$;

   б) $(A \to C) \to (\overline{\overline{B} \vee C} \to (A \wedge \overline{B} \to C))$.

3. Проверьте равносильность следующих формул:

   а) $X \vee Y \to \overline{Z}$ и $Y \wedge \overline{X} \to \overline{Z}$;

   б) $A \wedge B \to \overline{A}$ и $A \to B$.

4. Докажите с помощью законов логики равносильность следующих формул:

   а) $(P \to Q) \wedge (Q \to P) \wedge \overline{\overline{P} \wedge \overline{Q}}$ и $P \wedge Q$;

   б) $A \to \overline{B \wedge C}$ и $\overline{A} \vee \overline{B} \vee \overline{C}$.

5. Переформулируйте утверждение, используя законы логики: «$a \neq 3$ и $b \neq 2$».

6. Изобразите множества истинности предикатов, заданных на множестве $\mathbb{R}$:

   а) на координатной прямой; б) на координатной плоскости:

   а) $(x^2 > 0) \to (x^2 + 2x - 3 > 0)$; б) $(x^2 + y^2 \geq 0) \vee (x \cdot y = 0)$.

7. Какие из трех соотношений: $P(x) \Rightarrow Q(x)$; $Q(x) \Rightarrow P(x)$; $P(x) \Leftrightarrow Q(x)$ имеют место для предикатов $P(x)$ и $Q(x)$, заданных на множестве $\mathbb{R}$:

   а) $P(x) : x - 1 \geq 0$; $Q(x) : x^2 - 6x + 5 \geq 0$;

   б) $P(x) : (x^2 - x + 4) \cdot \sqrt{x+2} \leq \sqrt{x+2}$; $Q(x) : x^2 - x + 4 \leq 1$?

8. Найдите множество истинности заданного на $\mathbb{R}$ предиката $P(x) :\ 5^{|4x-6|} \geq 25^{3x-4}$.

9. Определите истинность высказывания на множестве $\mathbb{R}$; ответ обоснуйте:

   а) $(\forall x)(x^2 - 4x + 4 > 0)$; б) $(\exists x)(5 + x = 5)$;

   в) $(\exists x)(\exists y)(2x - 1 = x \cdot y)$.

10. Запишите с помощью логической и подходящей математической символики и постройте отрицания следующих предложений; в п. б) определите истинность высказывания и его отрицания; ответ обоснуйте:

    а) «f — возрастающая функция»;

    б) «Существует такое действительное число x и такое действительное число y, что $x - y = y - x$».

11. Опровергните с помощью контрпримера следующие высказывания:

    а) $(\forall x)((x^2 > 0) \to (x > 0))$;

    б) «Всякая критическая точка функции является точкой экстремума этой функции».

12. Запишите утверждение в виде всеобщего условного предложения, выделите разъяснительную часть, условие, заключение; постройте обратное, противоположное, контрапозиционное предложения; определите истинность каждого (ложные опровергните с помощью контрпримера):

    «Всякое натуральное число, оканчивающееся нулем, кратно 5».

13. Определите, является ли необходимым, достаточным, необходимым и достаточным условием предложение A для предложения B; предложение B для предложения A. В обоих случаях полученный результат сформулируйте, используя всевозможные подходящие термины: «если... то...»; «...достаточно...»; «...тогда, когда...»; «...необходимо...»; «...только тогда, когда...»; «...необходимо и достаточно...»; «...тогда и только тогда, когда...»:

    A: Около данного четырехугольника можно описать окружность;

    B: Данный четырехугольник — правильный.

14. Определите, истинно ли высказывание; ответ обоснуйте:
    «Для того чтобы четырехугольник был ромбом, необходимо, чтобы его диагонали были перпендикулярны».

15. Поставьте вместо точек подходящее словосочетание: «...необходимо...», «...достаточно...», «...необходимо и достаточно...», чтобы получилось истинное высказывание; результат обоснуйте:

    «Для того чтобы было $\alpha = \beta$, ... , чтобы $\sin\alpha = \sin\beta$».

ВАРИАНТ 5

1. Определите истинность высказывания:
«Если 2 делится на 3 и неверно, что 7 — нечетное число, то 2 не больше 3 или неверно, что 3 не делится на 2».

2. Постройте таблицу истинности для формулы:
а) $P \to \overline{Q \wedge (\overline{P} \vee \overline{Q})}$;
б) $(B \to \overline{C}) \to (A \vee \overline{B} \to \overline{A \wedge C})$.

3. Проверьте равносильность следующих формул:
а) $X \to (\overline{Y} \to \overline{Z})$ и $Z \to (\overline{X} \to \overline{Y})$;
б) $\overline{B \vee C \to A}$ и $\overline{B \to A} \vee \overline{C \to A}$.

4. Докажите с помощью законов логики равносильность следующих формул:
а) $(P \to Q) \wedge (Q \to \overline{P}) \wedge (R \to P)$ и $\overline{P} \wedge \overline{R}$;
б) $(A \to B) \to C$ и $(A \wedge \overline{B}) \vee C$.

5. Переформулируйте утверждение, используя законы логики: «Я не высплюсь или опоздаю».

6. Изобразите множества истинности предикатов, заданных на множестве $\mathbb{R}$:
а) на координатной прямой; б) на координатной плоскости:

а) $(x \le 5) \vee (x > 1)$; б) $(x^2 + y^2 > 1) \to (x \cdot y < 0)$.

7. Какие из трех соотношений: $P(x) \Rightarrow Q(x)$; $Q(x) \Rightarrow P(x)$; $P(x) \Leftrightarrow Q(x)$ имеют место для предикатов $P(x)$ и $Q(x)$, заданных на множестве $\mathbb{R}$:

а) $P(x):\ x^2 + 5x + 6 > 0$; $Q(x):\ x + 1 = 1 + x$;

б) $P(x) : (x^2 + x - 2) \cdot \sqrt{x^2 - 14} \ge 0$; $Q(x) : x^2 + x - 2 \ge 0$?

8. Найдите множество истинности заданного на $\mathbb{R}$ предиката $P(x):\ \log_{\frac{1}{5}}(x^2 - 6x + 18) + 2\log_5(x - 4) < 0$.

9. Определите истинность высказывания на множестве $\mathbb{R}$; ответ обоснуйте:

а) $(\forall x)(x^2 - 4x + 3 = 0) \wedge (x \neq 3)$;

б) $(\exists x)((x > 3) \to (x < 3))$; в) $(\forall x)(\exists y)(x + y = 1)$.

10. Запишите с помощью логической и подходящей математической символики и постройте отрицания следующих предложений; в п. б) определите истинность высказывания и его отрицания; ответ обоснуйте:

    а) «M — ограниченное множество»;

    б) «Для любого действительного числа x существует такое действительное число y, что $x + y = 0$».

11. Опровергните с помощью контрпримера следующие высказывания:

    а) $(\forall x)((x^2 > 16) \to (x > 4))$;

    б) «Диагонали параллелограмма равны».

12. Запишите утверждение в виде всеобщего условного предложения, выделите разъяснительную часть, условие, заключение; постройте обратное, противоположное, контрапозиционное предложения; определите истинность каждого (ложные опровергните с помощью контрпримера):

    «Сумма двух нечетных чисел — четное число».

13. Определите, является ли необходимым, достаточным, необходимым и достаточным условием предложение A для предложения B; предложение B для предложения A. В обоих случаях полученный результат сформулируйте, используя всевозможные подходящие термины: «если... то...»; «...достаточно...»; «...тогда, когда...»; «...необходимо...»; «...только тогда, когда...»; «...необходимо и достаточно...»; «...тогда и только тогда, когда...»:

    A: Углы α и β вертикальные;

    B: Углы α и β равны.

14. Определите, истинно ли высказывание; ответ обоснуйте:

    «Для того чтобы выполнялось $\alpha = \beta$, достаточно, чтобы было $\sin\alpha = \sin\beta$».

15. Поставьте вместо точек подходящее словосочетание: «...необходимо...», «...достаточно...», «...необходимо и достаточно...», чтобы получилось истинное высказывание; результат обоснуйте:

«Для того чтобы четырехугольник был параллелограммом, ..., чтобы точка пересечения его диагоналей была центром симметрии его вершин».

ВАРИАНТ 6

1. Определите истинность высказывания:
«Если 2 делится на 3 и 7 — простое число или 2 больше 3, то неверно, что 8 делится на 4 или 2 делится на 3».

2. Постройте таблицу истинности для формулы:
а) $\overline{(P \to Q) \to Q} \vee Q$;
б) $A \wedge B \to \overline{\overline{A} \wedge (B \vee C)}$.

3. Проверьте равносильность следующих формул:
а) $(A \to B) \vee C$ и $A \wedge \overline{C} \to B$;
б) $(X \to \overline{Y}) \to (Y \to Z)$ и $X \to Z$.

4. Докажите с помощью законов логики равносильность следующих формул:
а) $\overline{(P \to Q) \wedge (Q \to \overline{P})}$ и P;
б) $(B \vee C) \to A$ и $(B \to A) \wedge (C \to A)$.

5. Переформулируйте утверждение, используя законы логики: «Он знает математику и немецкий или французский язык».

6. Изобразите множества истинности предикатов, заданных на множестве $\mathbb{R}$:
а) на координатной прямой; б) на координатной плоскости:

а) $(|x| < 2) \to (|x| < 3)$; б) $(x^2 + y^2 \leq 4) \wedge (x^2 + y^2 > 1)$.

7. Какие из трех соотношений: $P(x) \Rightarrow Q(x)$; $Q(x) \Rightarrow P(x)$; $P(x) \Leftrightarrow Q(x)$ имеют место для предикатов $P(x)$ и $Q(x)$, заданных на множестве $\mathbb{R}$:

а) $P(x):\ (x-5)\cdot(x-2)\le 0;\quad Q(x):\ x-1>0;$

б) $P(x):|x-3|=|1-x|;\quad Q(x):\ (x-3)^2=(x-1)^2$?

8. Найдите множество истинности заданного на $\mathbb{R}$ предиката $P(x):\ \sqrt{x^2+3x+2}-\sqrt{x^2-x+1}=1$.

9. Определите истинность высказывания на множестве $\mathbb{R}$; ответ обоснуйте:

   а) $(\forall x)(3x^2+2x+6\ge 0)$;

   б) $(\exists x)((x<0)\wedge(x^2>1))$; в) $(\forall y)(\exists x)(x-y=3)$.

10. Запишите с помощью логической и подходящей математической символики и постройте отрицания следующих предложений; в п. б) определите истинность высказывания и его отрицания; ответ обоснуйте:

    а) «f — периодическая функция»;

    б) «Существует такое действительное число x, что для всякого действительного числа y верно равенство $x+y=y$».

11. Опровергните с помощью контрпримера следующие высказывания:

    а) $(\forall x)((x\,\vdots\,9)\to(x\,\vdots\,6))$;

    б) «Всякое натуральное число — простое или составное».

12. Запишите утверждение в виде всеобщего условного предложения, выделите разъяснительную часть, условие, заключение; постройте обратное, противоположное, контрапозиционное предложения; определите истинность каждого (ложные опровергните с помощью контрпримера):

    «Всякое натуральное число, оканчивающееся двумя нулями, кратно 4».

13. Определите, является ли необходимым, достаточным, необходимым и достаточным условием предложение A для предложения B; предложение B для предложения A. В обоих случаях полученный результат сформулируйте, используя всевозможные подходящие термины: «если... то...»; «...достаточно...»; «...тогда, когда...»; «...необходи-

мо...»; «...только тогда, когда...»; «...необходимо и достаточно...»; «...тогда и только тогда, когда...»:

$A\colon \alpha = \beta$; $B\colon \sin\alpha = \sin\beta$.

14. Определите, истинно ли высказывание; ответ обоснуйте:
«Для того чтобы было $2^x > 16$, необходимо, чтобы выполнялось $x > 4$».

15. Поставьте вместо точек подходящее словосочетание: «...необходимо...», «...достаточно...», «...необходимо и достаточно...», чтобы получилось истинное высказывание; результат обоснуйте:

«Для того чтобы натуральное число делилось на 9, ... , чтобы сумма его цифр была кратна 9».

ВАРИАНТ 7

1. Определите истинность высказывания:
«Если неверно, что 2 делится на 3 или 8 делится на 4, то неверно, что если 3 больше 8 и 2 не больше 3, то 2 не делится на 3».

2. Постройте таблицу истинности для формулы:
а) $(P \vee \overline{Q} \to Q) \wedge (\overline{P} \vee Q)$;
б) $(A \vee B \to A \vee C) \to \overline{A \wedge \overline{C}}$.

3. Проверьте равносильность следующих формул:
а) $(A \to B) \to C$ и $(A \wedge \overline{B}) \vee C$;
б) $(X \to \overline{Z}) \wedge \overline{Y}$ и $X \wedge (Y \to Z)$.

4. Докажите с помощью законов логики равносильность следующих формул:
а) $(P \wedge R) \vee \overline{(P \to R)} \vee (Q \wedge R) \vee (\overline{P} \wedge Q \wedge R)$ и $P \vee (Q \wedge R)$;
б) $(A \to B) \to C$ и $A \wedge B \to C$.

5. Переформулируйте утверждение, используя законы логики: «Я буду завтракать и обедать или завтракать и ужинать».

6. Изобразите множества истинности предикатов, заданных на множестве $\mathbb{R}$:
а) на координатной прямой; б) на координатной плоскости:

а) $(|x| < 3) \to \overline{(x \geq 2)}$; б) $\overline{(y \geq 3x + 1) \to (y \geq 2x - 2)}$.

7. Какие из трех соотношений: $P(x) \Rightarrow Q(x)$; $Q(x) \Rightarrow P(x)$; $P(x) \Leftrightarrow Q(x)$ имеют место для предикатов $P(x)$ и $Q(x)$, заданных на множестве $\mathbb{R}$:

а) $P(x): \ |x| < 4; \quad Q(x): \ x^2 - 3x + 2 \leq 0;$

б) $P(x): \ \dfrac{(x+2) \cdot \sqrt{x}}{\sqrt{x}} > 1; \quad Q(x): \ x + 2 > 1?$

8. Найдите множество истинности заданного на $\mathbb{R}$ предиката $P(x): \ 2^{x^2-3x+3} > 2^x$.

9. Определите истинность высказывания на множестве $\mathbb{R}$; ответ обоснуйте:

а) $(\forall x)(|x| = x)$; б) $(\exists x)(x^3 < x^2)$;
в) $(\exists x)(\exists y)(x + 2y = y)$.

10. Запишите с помощью логической и подходящей математической символики и постройте отрицания следующих предложений; в п. б) определите истинность высказывания и его отрицания; ответ обоснуйте:

а) «Существует действительный корень квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$»;

б) «Существуют такие действительные числа x и y, что для любого действительного числа z верно равенство $x \cdot z = y$».

11. Опровергните с помощью контрпримера следующие высказывания:
а) $(\forall x)\left(\left(\left(\dfrac{1}{2}\right)^x > 16\right) \to (x > 4)\right)$;

б) «Модуль любого действительного числа есть положительное число».

12. Запишите утверждение в виде всеобщего условного предложения, выделите разъяснительную часть, условие, заключение;

постройте обратное, противоположное, контрапозиционное предложения; определите истинность каждого (ложные опровергните с помощью контрпримера):

«В равнобедренном треугольнике углы при основании равны».

13. Определите, является ли необходимым, достаточным, необходимым и достаточным условием предложение A для предложения B; предложение B для предложения A. В обоих случаях полученный результат сформулируйте, используя всевозможные подходящие термины: «если... то...»; «...достаточно...»; «...тогда, когда...»; «...необходимо...»; «...только тогда, когда...»; «...необходимо и достаточно...»; «...тогда и только тогда, когда...»:

    A: число x положительное; B: число x натуральное.

14. Определите, истинно ли высказывание; ответ обоснуйте:

    «Для того чтобы многоугольник был правильным, необходимо, чтобы в него можно было вписать окружность».

15. Поставьте вместо точек подходящее словосочетание: «...необходимо...», «...достаточно...», «...необходимо и достаточно...», чтобы получилось истинное высказывание; результат обоснуйте:

    «Для того чтобы четырехугольник был ромбом, ... , чтобы его диагонали были перпендикулярны».

ВАРИАНТ 8

1. Определите истинность высказывания:
   «Неверно, что 2 делится на 3 и 3 больше 8, и неверно, что если 8 не делится на 4 и 2 не больше 3, то 7 — не простое число».

2. Постройте таблицу истинности для формулы:

   а) $P \wedge \overline{Q} \to \overline{(P \wedge Q) \vee \overline{P}}$;

   б) $A \vee B \to ((A \to C) \to \overline{\overline{B} \wedge \overline{C}})$.

3. Проверьте равносильность следующих формул:

   а) $(X \vee \overline{Y}) \to Z$ и $(Y \wedge \overline{X}) \to Z$;

   б) $(\overline{A} \vee B) \to C$ и $(\overline{C} \to \overline{B}) \wedge (\overline{C} \to A)$.

4. Докажите с помощью законов логики равносильность следующих формул:

   а) $(A \vee B) \to (\overline{A} \to C)$ и $\overline{\overline{A} \wedge B \wedge \overline{C}}$;

   б) $A \to (B \to C)$ и $B \to (\overline{A} \vee C)$.

5. Переформулируйте утверждение, используя законы логики: «Число n делится на 2 или на 3 и делится на 2 или на 5».

6. Изобразите множества истинности предикатов, заданных на множестве $\mathbb{R}$:

   а) на координатной прямой; б) на координатной плоскости:

   а) $(x > -2) \wedge (x < 2)$; б) $(x \cdot y < 0) \to (x^2 + y^2 > 1)$.

7. Какие из трех соотношений: $P(x) \Rightarrow Q(x)$; $Q(x) \Rightarrow P(x)$; $P(x) \Leftrightarrow Q(x)$ имеют место для предикатов $P(x)$ и $Q(x)$, заданных на множестве $\mathbb{R}$:

   а) $P(x) : |x - 2| \geq 5$; $Q(x) : \ |x| \geq 1$;

   б) $P(x) : x^2 + 12 + \sqrt{x} = 18 - x + \sqrt{x}$; $Q(x) : x^2 + 12 = 18 - x$?

8. Найдите множество истинности заданного на $\mathbb{R}$ предиката $P(x) : \ 2^{x^2-6x+8} > 1$.

9. Определите истинность высказывания на множестве $\mathbb{R}$; ответ обоснуйте:

   а) $(\exists x)((x > 0) \wedge (\sin x > 0))$; б) $(\forall x)((|x| \leq 1) \wedge (x^2 > 1))$;

   в) $(\exists x)(\forall y)((x - x^2) \cdot y \geq 0)$.

10. Запишите с помощью логической и подходящей математической символики и постройте отрицания следующих предложений; в п. б) определите истинность высказывания и его отрицания; ответ обоснуйте:

    а) «x_0 — точка максимума функции на $[a;\ b]$»;

    б) «Существуют такие действительные числа x и z, что для всякого действительного числа y верно равенство $x + y = z$».

11. Опровергните с помощью контрпримера следующие высказывания:

    а) $(\forall x)((0,2^x > 0,0016) \to (x > 4))$;

б) «Любые равные углы являются вертикальными».

12. Запишите утверждение в виде всеобщего условного предложения, выделите разъяснительную часть, условие, заключение; постройте обратное, противоположное, контрапозиционное предложения; определите истинность каждого (ложные опровергните с помощью контрпримера):

    «Всякое натуральное число, оканчивающееся нулем, делится на 2».

13. Определите, является ли необходимым, достаточным, необходимым и достаточным условием предложение A для предложения B; предложение B для предложения A. В обоих случаях полученный результат сформулируйте, используя всевозможные подходящие термины: «если... то...»; «...достаточно...»; «...тогда, когда...»; «...необходимо...»; «...только тогда, когда...»; «...необходимо и достаточно...»; «...тогда и только тогда, когда...»:

    A: Прямые l_1 и l_2 расположены в одной плоскости;

    B: Прямые l_1 и l_2 параллельны.

14. Определите, истинно ли высказывание; ответ обоснуйте:

    «Для того чтобы функция имела обратную на некотором промежутке, достаточно, чтобы она была возрастающей на этом промежутке».

15. Поставьте вместо точек подходящее словосочетание: «...необходимо...», «...достаточно...», «...необходимо и достаточно...», чтобы получилось истинное высказывание; результат обоснуйте:

    «Для того чтобы число было кратно 5, ..., чтобы оно оканчивалось нулем».

ВАРИАНТ 9

1. Определите истинность высказывания:
   «Если 2 делится на 3 и 7 — простое число, то неверно, что 2 не больше 3 и 8 не делится на 4».

2. Постройте таблицу истинности для формулы:
   а) $\overline{P \wedge \overline{Q}} \to \overline{\overline{P} \vee (Q \wedge \overline{P})}$;
   б) $A \wedge \overline{\overline{B} \to \overline{C} \wedge (B \to \overline{C} \wedge \overline{A})}$.

3. Проверьте равносильность следующих формул:
   а) $A \to \overline{B} \wedge \overline{C}$ и $(\overline{A} \to \overline{C}) \wedge (\overline{A} \to \overline{B})$;
   б) $X \wedge Y \to Y \wedge \overline{Z}$ и $\overline{Y} \vee (X \to \overline{Z})$.

4. Докажите с помощью законов логики равносильность следующих формул:
   а) $A \to (B \to C)$ и $(A \to B) \to (A \to C)$;
   б) $(P \vee Q) \wedge (P \vee \overline{Q})$ и P.

5. Переформулируйте утверждение, используя законы логики: «Я подпишусь на “Комсомольскую правду” и “Алтайскую правду” или на “Комсомольскую правду” и “Вечерний Барнаул”».

6. Изобразите множества истинности предикатов, заданных на множестве $\mathbb{R}$:
   а) на координатной прямой; б) на координатной плоскости:

   а) $(x \geq 2) \wedge (|x| < 3)$;
   б) $(x^2 + y^2 < 0) \to (|x| + |y| > |x + y|)$.

7. Какие из трех соотношений: $P(x) \Rightarrow Q(x)$; $Q(x) \Rightarrow P(x)$; $P(x) \Leftrightarrow Q(x)$ имеют место для предикатов $P(x)$ и $Q(x)$, заданных на множестве $\mathbb{R}$:

   а) $P(x):\ |x - 3| < 2$; $Q(x):\ x^2 - 6x + 8 > 0$;
   б) $P(x):\ 2x - 5 + \dfrac{1}{x-4} = 4 - x + \dfrac{1}{x-4}$;
   $Q(x):\ 2x - 5 = 4 - x$?

8. Найдите множество истинности заданного на $\mathbb{R}$ предиката $P(x):\ \log_{0,1}(x^2 + x + 2) > \log_{0,1}(x + 3)$.

9. Определите истинность высказывания на множестве $\mathbb{R}$; ответ обоснуйте:

   а) $(\forall x)(x^2 + x = 2)$; б) $(\exists x)((3x^2 > x^3) \wedge (2^x < 10))$;

в) $(\forall x)(\exists y)(x - y = y - x)$.

10. Запишите с помощью логической и подходящей математической символики и постройте отрицания следующих предложений; в п. б) определите истинность высказывания и его отрицания; ответ обоснуйте:

    а) «x_0 — точка минимума функции на $[a;\ b]$»;

    б) «Существует такое действительное число z, что для любых действительных чисел x и y верно равенство $x + y = z$».

11. Опровергните с помощью контрпримера следующие высказывания:

    а) $(\forall x)(\forall y)((\sin x = \sin y) \to (x = y))$;

    б) «Диагонали прямоугольника перпендикулярны».

12. Запишите утверждение в виде всеобщего условного предложения, выделите разъяснительную часть, условие, заключение; постройте обратное, противоположное, контрапозиционное предложения; определите истинность каждого (ложные опровергните с помощью контрпримера):

    «Синусы равных аргументов равны».

13. Определите, является ли необходимым, достаточным, необходимым и достаточным условием предложение A для предложения B; предложение B для предложения A. В обоих случаях полученный результат сформулируйте, используя всевозможные подходящие термины: «если... то...»; «...достаточно...»; «...тогда, когда...»; «...необходимо...»; «...только тогда, когда...»; «...необходимо и достаточно...»; «...тогда и только тогда, когда...»:

    A: $ABCD$ — ромб; B: $ABCD$ — квадрат.

14. Определите, истинно ли высказывание; ответ обоснуйте:

    «Для того чтобы треугольники были равны, достаточно, чтобы были равны их соответствующие углы».

15. Поставьте вместо точек подходящее словосочетание: «...необходимо...», «...достаточно...», «...необходимо и достаточно...», чтобы получилось истинное высказывание;

результат обоснуйте:

«Для того чтобы многоугольник был правильным, ... , чтобы в него можно было вписать окружность».

ВАРИАНТ 10

1. Определите истинность высказывания: «Если 2 делится на 3 или 7 — простое число, и неверно, что если 3 не больше 8 и 8 делится на 4, то 2 не больше 3».

2. Постройте таблицу истинности для формулы:
   а) $(P \to Q) \to (\overline{P \to \overline{Q}} \vee (P \wedge Q))$;
   б) $(A \to B) \to ((A \to \overline{\overline{B} \wedge \overline{C}})) \to C \wedge A)$.

3. Проверьте равносильность следующих формул:
   а) $(X \to Y) \to Z$ и $\overline{Z} \to (X \wedge \overline{Y})$
   б) $C \to A \wedge \overline{B}$ и $\overline{\overline{A} \vee B} \vee C$.

4. Докажите с помощью законов логики равносильность следующих формул:
   а) $((X \to Y) \to (X \to \overline{Y}) \to \overline{X}) \to X$ и X;
   б) $A \vee (\overline{A} \wedge B)$ и $A \vee B$.

5. Переформулируйте утверждение, используя законы логики: «Сегодня у нас математика, а также иностранный язык или история».

6. Изобразите множества истинности предикатов, заданных на множестве $\mathbb{R}$:
   а) на координатной прямой; б) на координатной плоскости:

   а) $(\lg x < 0) \wedge (x < 1)$; б) $(x^2 + y^2 = 1) \to (x \cdot y = 0)$.

7. Какие из трех соотношений: $P(x) \Rightarrow Q(x)$; $Q(x) \Rightarrow P(x)$; $P(x) \Leftrightarrow Q(x)$ имеют место для предикатов $P(x)$ и $Q(x)$, заданных на множестве $\mathbb{R}$:

   а) $P(x):\ x^2 - 10x + 21 \le 0$; $Q(x):\ x^2 - 9x + 20 < 0$;

   б) $P(x):\ \sqrt{x} \cdot \sqrt{x+1} = \sqrt{2}$; $Q(x):\ \sqrt{x \cdot (x+1)} = \sqrt{2}$?

8. Найдите множество истинности заданного на $\mathbb{R}$ предиката $P(x): \ \dfrac{x^2-3x+2}{x^2-1} > 0$.

9. Определите истинность высказывания на множестве $\mathbb{R}$; ответ обоснуйте:

   а) $(\exists x)(x^2+2x+4 \leq 0)$; б) $(\forall x)(|x| > 0)$;

   в) $(\exists x)(\forall y)(x \geq y)$.

10. Запишите с помощью логической и подходящей математической символики и постройте отрицания следующих предложений; в п. б) определите истинность высказывания и его отрицания; ответ обоснуйте:

    а) «(x_n) — ограниченная последовательность»;

    б) «Существует такое действительное число y, что для любого действительного числа x верно равенство $x \cdot y = y$».

11. Опровергните с помощью контрпримера следующие высказывания:

    а) $(\forall x)\left(\left(\left(\dfrac{1}{5}\right)^x > 25\right) \to (x > 2)\right)$;

    б) «Всякое четное натуральное число — составное».

12. Запишите утверждение в виде всеобщего условного предложения, выделите разъяснительную часть, условие, заключение; постройте обратное, противоположное, контрапозиционное предложения; определите истинность каждого (ложные опровергните с помощью контрпримера):

    «Сумма двух положительных чисел есть положительное число».

13. Определите, является ли необходимым, достаточным, необходимым и достаточным условием предложение A для предложения B; предложение B для предложения A. В обоих случаях полученный результат сформулируйте, используя всевозможные подходящие термины: «если... то...»; «...достаточно...»; «...тогда, когда...»; «...необходимо...»; «...только тогда, когда...»; «...необходимо и достаточно...»; «...тогда и только тогда, когда...»:

$A\colon (x-1)\cdot(x-2)=0; \quad B\colon x-1=0.$

14. Определите, истинно ли высказывание; ответ обоснуйте:
«Для того чтобы число делилось на 5, необходимо, чтобы оно оканчивалось цифрой 5».

15. Поставьте вместо точек подходящее словосочетание: «…необходимо…», «…достаточно…», «…необходимо и достаточно…», чтобы получилось истинное высказывание; результат обоснуйте:

«Для того чтобы функция была четной, … , чтобы ее график был симметричен относительно оси ординат».

ИНДИВИДУАЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ № 2

Множества, отношения, отображения множеств

ВАРИАНТ 1

1. Проверьте, является ли одно из множеств A и B подмножеством другого; равны ли эти множества:

   $A = \{y \in \mathbb{R} \mid y = 3k+1, k \in \mathbb{Z}\}$; $B = \{y \in \mathbb{R} \mid y = \dfrac{3k-1}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$.

2. Изобразите на координатной плоскости множество точек $A = \{(x;\, y) \mid x + y = |x + y|\}$.

3. Докажите соотношения между множествами и изобразите их с помощью диаграмм Эйлера. В п. а) опровергните обратное включение контрпримером:

   а) $(A - B) \cup (B - A) \subset A \cup B$; б) $A - B = A - (A \cap B)$.

4. Упростите и изобразите на координатной прямой следующие множества:

   а) $\overline{A - B}$; б) $\overline{\overline{A} \cap B}$; в) $\overline{\overline{A} \cup \overline{B}}$,

   где $A = [2; 5]$, $B = [0; 7]$.

5. Найдите число всех натуральных чисел, не превосходящих 1000, которые делятся на 7 или делятся на 5, но не делятся на 11.

6. На множестве A задано отношение ρ. Определите, какими из свойств рефлексивности, антирефлексивности, симметричности, антисимметричности, транзитивности и связности обладает это отношение:

   а) $\rho = \{(1; 2), (2; 3), (1; 3), (1; 1), (2; 2), (3; 3)\}$, $A = \{1, 2, 3\}$;

   б) $x\rho y \Leftrightarrow x < y$, $A = \mathbb{R}$.

7. А. Определите, будет ли отношение ρ на множестве A отношением эквивалентности:

   $\rho = \{(1; 3), (1; 1), (2; 2), (3; 1), (3; 3)\}$, $A = \{1, 2, 3\}$.

Б. На множестве M задано симметричное и транзитивное отношение ρ, причем для любого $x \in M$ существует $y \in M$ такое, что $x\rho y$. Докажите, что ρ — отношение эквивалентности.

8. Докажите, что отношение ρ на множестве A является отношением эквивалентности, и постройте фактор-множество множества A по отношению ρ:

   а) $\rho = \{(1;1), (1;2), (2;2), (2;1), (3;3), (3;4), (4;4), (4;3)\}$, $A = \{1, 2, 3, 4\}$;

   б) $x\rho y \Leftrightarrow x - y \,\vdots\, 4$, $A = \mathbb{Z}$.

9. Проверьте, будет ли данное отношение отношением порядка на данном множестве. Если будет, то укажите вид отношения порядка и найдите экстремальные элементы по данному отношению:

   а) $\rho = \{(1;1), (2;3), (3;3), (2;2), (2;1), (3;1)\}$;

   б) отношение «$\vdots$» на множестве $\mathbb{N} - \{1\}$.

10. А. Найдите образ отображения $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, определенного правилом $f : y = x^2 - 1$.

    Б. Пусть $A = \{(x; y) \,|\, y = 2x + 3\}$. Найдите $f(A)$ для отображения $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : (x;\ y) \mapsto (y; x)$. Изобразите множества A и $f(A)$ и опишите геометрический смысл отображения f.

    В. Найдите прообраз множества $\{0, 1\}$ при отображении $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, где $f(x) = \sin x$.

11. Определите вид отображения $\mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = x^2 + 3x + 5$.

12. Найдите произведения fg и gf отображений f и g, где $g(x) = x^2 + 1,\ f(x) = \sin x$.

13. Докажите обратимость отображения $f : A \to B$ и задайте формулой отображение f^{-1}, где $A = \mathbb{R}^+$, $B = (-2; +\infty)$, $f(x) = x^2 - 2$.

ВАРИАНТ 2

1. Проверьте, является ли одно из множеств A и B подмножеством другого; равны ли эти множества:

   $A = \{y \in \mathbb{R} \mid y = 8k - 3, k \in \mathbb{Z}\}$; $B = \{y \in \mathbb{R} \mid y = 8k + 5, k \in \mathbb{Z}\}$.

2. Изобразите на координатной плоскости множество точек $A = \{(x; y) \mid |y| - |x| \geq 0\}$.

3. Докажите соотношения между множествами и изобразите их с помощью диаграмм Эйлера. В п. а) опровергните обратное включение контрпримером:

   а) $(A - B) - C \subset A \cap \overline{C}$; б) $A - B = (A \cup B) - B$.

4. Упростите и изобразите на координатной прямой следующие множества:

   а) $\overline{A \cup \overline{B}}$; б) $\overline{\overline{A} \cap \overline{B}}$; в) $\overline{A - \overline{B}}$,

   где $A = (-3; 6)$; $B = (-\infty; 0]$.

5. Найдите число всех натуральных чисел, не превосходящих 1000, которые делятся на 3 или делятся на 13, но не делятся на 11.

6. На множестве A задано отношение ρ. Определите, какими из свойств рефлексивности, антирефлексивности, симметричности, антисимметричности, транзитивности и связности обладает это отношение:

   а) $\rho = \{(1; 2), (2; 3), (1; 1), (1; 3), (2; 2), (3; 3)\}$, $A = \{1, 2, 3\}$;

   б) $x \rho y \Leftrightarrow x \vdots y$, $A = \mathbb{Z}$.

7. А. Определите, будет ли отношение ρ, заданное на множестве A, отношением эквивалентности:
   $\rho = \{(1; 2), (2; 3), (1; 3), (2; 1), (3; 2), (3; 1), (1; 1), (2; 2), (3; 3), (4; 4)\}$, $A = \{1, 2, 3, 4\}$.

   Б. Пусть дано отношение эквивалентности на множестве A, $a, b, c \in A$ и $[a], [b], [c]$ — классы эквивалентности по данному отношению. Докажите, что если $a \in [b]$ и $b \notin [c]$, то $c \notin [a]$.

8. Докажите, что отношение ρ на множестве A является отношением эквивалентности, и постройте фактор-множество множества A по отношению ρ:

   а) $\rho = \{(a;b),(a;a),(c;c),(d;b),(b;a),(b;d),(b;b),(d;d),(a;d),(d;a)\}$, $A = \{a,b,c,d,\}$;

   б) $x\rho y \Leftrightarrow x - y \,\vdots\, 5$, $A = \mathbb{Z}$.

9. Проверьте, будет ли данное отношение отношением порядка на данном множестве. Если будет, то укажите вид отношения порядка и найдите экстремальные элементы по данному отношению:

   а) $\varphi = \{(0;0),(2;2),(4;4),(6;6),(0;2),(0;4),(0;6),(2;4),(2;6),(4;6)\}$, $X = \{0,4,6,2\}$;

   б) отношение включения на множестве всех подмножеств множества A, содержащего не менее двух элементов.

10. А. Найдите образ отображения $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, определенного правилом $f : y = \sin x + 1$.

    Б. Пусть $A = \{(x;y) \,|\, y = -x + 2\}$. Найдите $f(A)$ для отображения $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : (x;y) \mapsto (-x;-y)$. Изобразите множества A и $f(A)$ и опишите геометрический смысл отображения f.

    В. Найдите прообраз множества $\{0,1\}$ при отображении $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, где $f(x) = \lg(x^2+1)$.

11. Определите вид отображения $\mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = x^2 - x - 1$.

12. Найдите произведения fg и gf отображений f и g, где $f(x) = \lg x$, $g(x) = \sin x$.

13. Докажите обратимость функции $f : (-\infty;-2] \to \mathbb{R}$, если $f(x) = x^2 - 2$, и задайте формулой функцию f^{-1}. Найдите области определения и множества значений функций f и f^{-1}.

ВАРИАНТ 3

1. Проверьте, является ли одно из множеств A и B подмножеством другого; равны ли эти множества:

   $A = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x = \dfrac{5k-3}{4}, k \in \mathbb{Z}\}$;

$B = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \dfrac{5k+2}{4}, k \in \mathbb{Z}\}$.

2. Изобразите на координатной плоскости множество точек $A = \{(x; y) \mid x^2 + y^2 = 2|x| + 2|y|\}$.

3. Докажите соотношения между множествами и изобразите их с помощью диаграмм Эйлера. В п. а) опровергните обратное включение контрпримером:

   а) $(A - B) \cup (B - A) \cap C \subset C - \overline{A \cup B}$;

   б) $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$.

4. Упростите и изобразите на координатной прямой следующие множества:

   а) $\overline{A \cap \overline{B}}$; б) $\overline{\overline{A} - B}$; в) $\overline{A \cup \overline{B}}$,

   где $A = [7; +\infty)$, $B = (-3; 2]$.

5. Найдите число натуральных чисел, не превосходящих 1000, которые не делятся на 5 или делятся на 3 и на 11.

6. На множестве A задано отношение ρ. Определите, какими из свойств рефлексивности, антирефлексивности, симметричности, антисимметричности, транзитивности и связности обладает это отношение:

   а) $\rho = \{(3; 2), (1; 1), (3; 3), (1; 2), (2; 3), (2; 1), (1; 3), (3; 1), (2; 2)\}$, $A = \{1, 2, 3\}$;

   б) ρ — отношение включения множеств, A — множество всех подмножеств универсального множества.

7. А. Определите, будет ли отношение ρ на множестве A отношением эквивалентности:

   $\rho = \{(a; a), (a; c), (b; a), (b; b), (c; c), (b; c), (c; b), (c; a), (a; b), (f; f), (e; e), (e; d), (d; e), (d; d)\}$, $A = \{a, b, c, d, e, f\}$.

   Б. Пусть ρ — отношение эквивалентности на множестве $\mathbb{N}$. Докажите, что: 1) если $5\rho6$ и $6\rho10$, то $10\rho5$; 2) если $1\not\rho3$ и $3\rho4$, то $1\not\rho4$.

8. Докажите, что отношение ρ на множестве A является отношением эквивалентности, и постройте фактор-множество

множества A по отношению ρ:

а) $x\rho y \Leftrightarrow x - y \vdots 5$; $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \leq 6\}$;

б) $x\rho y \Leftrightarrow x^2 - y^2 = 0$; $A = \mathbb{R}$.

9. А. Проверьте, будет ли данное отношение отношением порядка на множестве $\mathbb{R}$. Если будет, то укажите вид отношения порядка и найдите экстремальные элементы по данному отношению:
1) $x\varphi_1 y \Leftrightarrow x < y$; 2) $x\varphi_2 y \Leftrightarrow x$ меньше y на 3.

Б. Среди графов, изображенных на рисунке 11, укажите отношения порядка; определите вид отношения порядка и найдите экстремальные элементы по данному отношению.

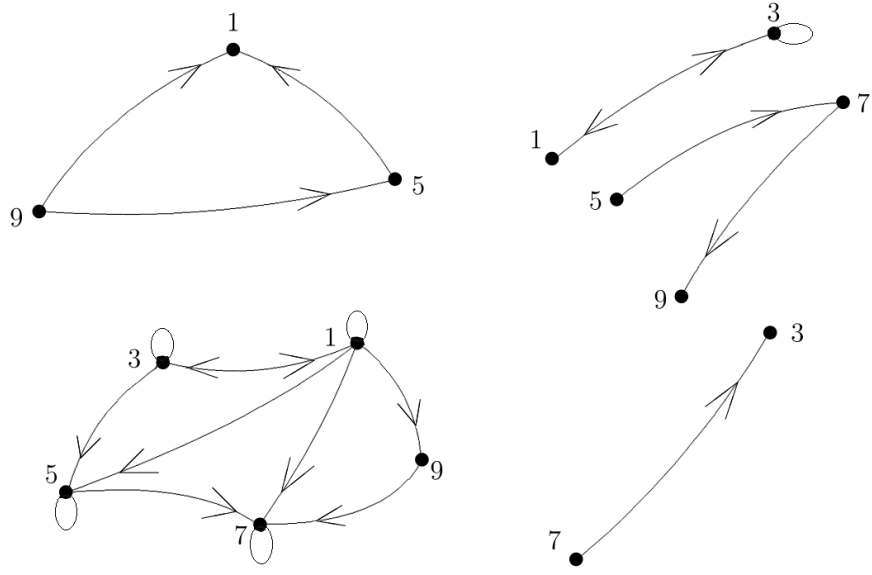


Рис. 11

10. А. Найдите образ отображения $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, определенного правилом $f : y = 2^x$.

Б. Пусть $A = \{(x; y) \mid y = 2x + 3\}$. Найдите $f(A)$ для отображения $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : (x; y) \mapsto (x; -y)$. Изобразите множества A и $f(A)$ и опишите геометрический смысл отображения f.

В. Найдите прообраз множества $\{0, 1\}$ при отображении $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, где $f(x) = x^2 + x + 2$.

11. Определите вид отображения $\mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = 2^{x^2+3x+4}$.

12. Найдите произведения fg и gf отображений f и g, если $f(x) = 2x + 1$, $g(x) = x^2$.

13. Докажите обратимость отображения $f : A \to B$ и задайте формулой отображение f^{-1}, где $A = B = (0; +\infty)$, $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

ВАРИАНТ 4

1. Проверьте, является ли одно из множеств A и B подмножеством другого; равны ли эти множества:

   $A = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x = 7k - 2, k \in \mathbb{Z}\}$; $B = \{x \in \mathbb{R} \,|\, y = 7k + 5, k \in \mathbb{Z}\}$.

2. Изобразите на координатной плоскости множество точек $A = \{(x; y) \mid \log_{0,5}(2 - x^2 - y^2) < 0\}$.

3. Докажите соотношения между множествами и изобразите их с помощью диаграмм Эйлера. В п. а) опровергните обратное включение контрпримером:

   а) $A \cap B \subset (A \cup B) - (A - B)$;

   б) $(A \cup B) - C = (A - C) \cup (B - C)$.

4. Упростите и изобразите на координатной прямой следующие множества:

   а) $\overline{A - \overline{B}}$; б) $\overline{\overline{A} \cup B}$; в) $\overline{\overline{A} \cap \overline{B}}$,

   где $A = [2; 4]$; $B = (3; +\infty)$.

5. Найдите число натуральных чисел, не превосходящих 1000, которые делятся на 5 или делятся на 17 и на 2.

6. На множестве A задано отношение ρ. Определите, какими из свойств рефлексивности, антирефлексивности, симметричности, антисимметричности, транзитивности и связности обладает это отношение:

   а) $\rho = \{(3; 3), (3; 5), (5; 3), (5; 5), (5; 7), (7; 7), (7; 8), (8; 7), (9; 8), (8; 9), (3; 8), (8; 3), (8; 5), (5; 8), (3; 7), (7; 3)\}$, $A = \{3, 5, 7, 8, 9\}$;

б) $x\rho y \Leftrightarrow x - y \vdots 3$, $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \leq 8\}$.

7. А. Определите, будет ли отношение ρ на множестве A отношением эквивалентности:
$\rho = \{(b_1; b_1), (b_2; b_2), (b_1; b_2), (b_2; b_1), (b_3; b_3), (b_4; b_5), (b_4; b_4), (b_5; b_5), (b_5; b_4)\}$, $A = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\}$.

   Б. Пусть ρ и φ — отношения эквивалентности на некотором множестве; α — отношение на этом множестве такое, что $x\alpha y \Leftrightarrow x\rho y$ или $x\varphi y$. Будет ли отношение α отношением эквивалентности?

8. Докажите, что отношение ρ на множестве A является отношением эквивалентности, и постройте фактор-множество множества A по отношению ρ:

   а) $\rho = \{(a; a), (b; b), (c; c)\}$, $A = \{a, b, c\}$;

   б) $x\rho y \Leftrightarrow x - y \vdots 4$, $A = \mathbb{Z}$.

9. Проверьте, будет ли данное отношение отношением порядка на данном множестве. Если будет, то укажите вид отношения порядка и найдите экстремальные элементы по данному отношению:

   а) $\rho = \{(1; 2), (1; 1), (2; 3), (1; 3), (2; 2), (3; 3)\}$, $M = \{1, 2, 3\}$;

   б) $m\rho n \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z})(n = k \cdot m)$.

10. А. Найдите образ отображения $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, определенного правилом $f : y = x^2 - x - 1$.

    Б. Пусть $A = \{(x; y) \mid y = -x + 2\}$. Найдите $f(A)$ для отображения $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : (x; y) \mapsto (-x; y)$. Изобразите множества A и $f(A)$ и опишите геометрический смысл отображения f.

    В. Найдите прообраз множества $\{0, 1\}$ при отображении $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, где $f(x) = 2^{x^2-1}$.

11. Определите вид отображения $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{N} : f(x, y) = x + y$.

12. Найдите произведения fg и gf отображений f и g, если $f(x) = \dfrac{2}{x+1}$ и $g(x) = \ln x$.

13. Докажите обратимость функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и задайте формулой функцию f^{-1}, где $f(x) = \sqrt[3]{x+1}$. Найдите области определения и множества значений функций f и f^{-1}.

ВАРИАНТ 5

1. Проверьте, является ли одно из множеств A и B подмножеством другого; равны ли эти множества:

   $A = \{y \in \mathbb{R} \mid y = 19k + 5, k \in \mathbb{Z}\}$;
   $B = \{y \in \mathbb{R} \mid y = 19k - 14, k \in \mathbb{Z}\}$.

2. Изобразите на координатной плоскости множество точек $A = \{(x; y) \mid x^2 + y^2 - 4y \leq 0\}$.

3. Докажите соотношения между множествами и изобразите их с помощью диаграмм Эйлера. В п. а) опровергните обратное включение контрпримером:

   а) $A \cap (B - C) \subset (A \cup B) - (A \cap C)$;

   б) $(A - C) \cap (B - C) = (A \cap B) - C$.

4. Упростите и изобразите на координатной прямой следующие множества:

   а) $\overline{\overline{A} \cup B}$; б) $\overline{A - B}$; в) $\overline{A \cap \overline{B}}$,

   где $A = (-\infty; 2]$, $B = (-3; +\infty)$.

5. Найдите число всех натуральных чисел, не превосходящих 1000, которые не делятся на 7 или делятся на 3 и не делятся на 2.

6. На множестве A задано отношение ρ. Определите, какими из свойств рефлексивности, антирефлексивности, симметричности, антисимметричности, транзитивности и связности обладает это отношение:

   а) $\rho = \{(9; 3),\ (3; 5),\ (5; 3),\ (3; 9),\ (3; 3),\ (9; 9),\ (5; 5),\ (10; 10)\}$, $A = \{3, 5, 9, 10\}$;

   б) $x\rho y \Leftrightarrow x + y = 0$, $A = \mathbb{R}$.

7. Докажите, что отношение ρ на множестве A является отношением эквивалентности, и постройте фактор-множество множества A по отношению ρ:
а) $\rho = \{(1;3),(1;1),(3;3),(3;1),(3;7),(1;7),(7;1),(7;7),(7;3),(4;4),(5;5),(2;5),(5;2),(2;2)\}$, $A = \{1,2,3,4,5,7\}$;

б) $x\rho y \Leftrightarrow x - y \,\vdots\, 10$, A — множество четных целых чисел.

8. А. Определите, будет ли отношением эквивалентности отношение, заданное графом, изображенным на рисунке 12.

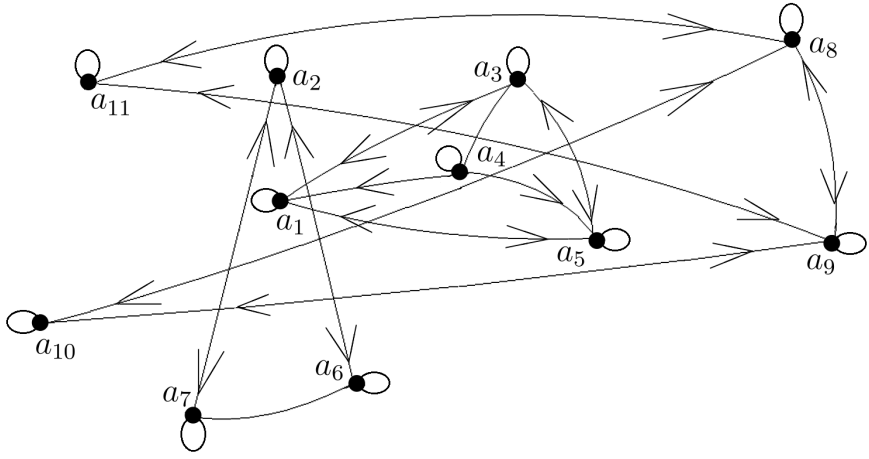


Рис. 12

Б. Пусть ρ — отношение эквивалентности на множестве A, элементы a, b и c принадлежат A. Известно, что $a\rho b$ и $c\rho b$. Верно ли, что $c\rho a$?

9. Проверьте, будет ли данное отношение отношением порядка на данном множестве. Если будет, то укажите вид отношения порядка и найдите экстремальные элементы по данному отношению:

а) $\rho = \{(a;b),(a;c),(b;b),(a;d),(a;a),(b;c),(d;d)\}$,
$A = \{a,b,c,d\}$;

б) $x\rho y \Leftrightarrow x \,\vdots\, y$, $x, y \in \mathbb{N} - \{1\}$.

10. А. Найдите образ отображения $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, определенного правилом $f : y = 2^{x^2+3x+4}$.

Б. Пусть $A = \{(x; y) \mid y = 2x + 3\}$. Найдите $f(A)$ для отображения $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : (x; y) \mapsto (x - 2; y + 2)$. Изобразите множества A и $f(A)$ и опишите геометрический смысл отображения f.

В. Найдите прообраз множества $\{0, 1\}$ при отображении $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, где $f(x) = \ln(x^2 - x + 2)$.

11. Определите вид отображения $\mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = |x|$.

12. Найдите произведения fg и gf для отображений f и g, где $f(x) = x^2 + x + 1$ и $g(x) = \cos x$.

13. Докажите обратимость отображения $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и задайте формулой отображение f^{-1}, где $f(x) = 5 - 2x$.

ВАРИАНТ 6

1. Проверьте, является ли одно из множеств A и B подмножеством другого; равны ли эти множества:

   $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x = 5k + 2, k \in \mathbb{Z}\}$;

   $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \dfrac{5k - 3}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$.

2. Изобразите на координатной плоскости множество точек $A = \{(x; y) \mid y - x^2 \geq 0\}$.

3. Докажите соотношения между множествами и изобразите их с помощью диаграмм Эйлера. В п. а) опровергните обратное включение контрпримером:

   а) $(A - B) \cup (B - A) \subset A \cup B$; б) $(A - B) - C = A - (B \cup C)$.

4. Упростите и изобразите на координатной прямой следующие множества:

   а) $\overline{A \cap B}$; б) $\overline{A \cup \overline{B}}$; в) $\overline{A - B}$,

   где $A = [2; 5]$, $B = (-3; 6)$.

5. Найдите число всех натуральных чисел, не превосходящих 1000, которые делятся на 7 или делятся на 5 и не делятся на 13.

6. На множестве A задано отношение ρ. Определите, какими из свойств рефлексивности, антирефлексивности, симметричности, антисимметричности, транзитивности и связности обладает это отношение:

   а) $x\rho y \Leftrightarrow x - y \vdots 2$, $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$;

   б) $x\rho y \Leftrightarrow x \perp y$, A — множество прямых плоскости.

7. А. Определите, будет ли отношение ρ на множестве A отношением эквивалентности:

   $\rho = \{(b_1; b_1), (b_2; b_3), (b_2; b_2), (b_3; b_2), (b_4; b_4), (b_3; b_3)\}$,
   $A = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$.

   Б. Пусть «$\sim$» — отношение эквивалентности на множестве A, элементы a и b принадлежат A, $[a]$, $[b]$ — классы эквивалентности по отношению «$\sim$». Докажите, что $a \sim b$ тогда и только тогда, когда $[a] = [b]$.

8. Докажите, что отношение ρ на множестве A является отношением эквивалентности, и постройте фактор-множество множества A по отношению ρ:

   а) $A = \{a, b, c, d, e, k, m, t\}$, отношение ρ задано графом, изображенным на рисунке 13;

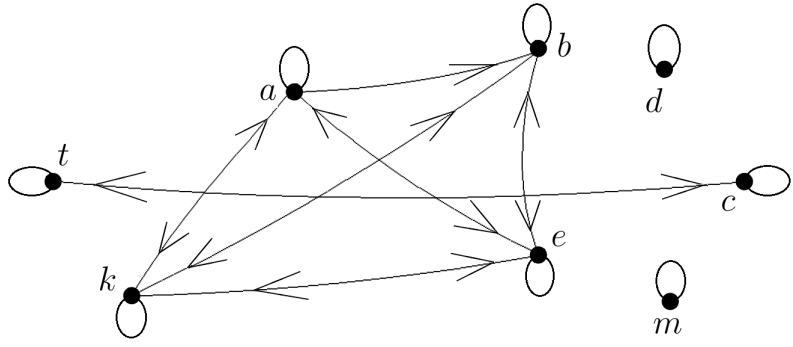


Рис. 13

   б) A — множество точек плоскости; O — произвольная точка этой плоскости; $X\rho Y \Leftrightarrow OX = OY$.

9. Проверьте, будет ли данное отношение отношением порядка на данном множестве. Если будет, то укажите вид отношения

порядка и найдите экстремальные элементы по данному отношению:

а) $\rho = \{(a;a),(b;b),(a;d),(d;c),(a;c),(c;c),(d;d)\}$, $A = \{a,b,c,d\}$;

б) отношение «больше» на множестве действительных чисел.

10. А. Найдите образ отображения $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, определенного правилом $f : y = \log_2(x^2 - 3x + 3)$.

    Б. Пусть $A = \{(x;y) \mid y = -x + 2\}$. Найдите $f(A)$ для отображения $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : (x;y) \mapsto (y;x)$. Изобразите множества A и $f(A)$ и опишите геометрический смысл отображения f.

    В. Найдите прообраз множества $\{0,1\}$ при отображении $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, где $f(x) = x^2 - 3x + 2$.

11. Определите вид отображения $\mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = x^2 + x + 1$.

12. Найдите произведения fg и gf отображений f и g, где $f(x) = -2x + 1$ и $g(x) = x^2$. Найдите области определения и множества значений данных отображений и их произведений.

13. Докажите обратимость отображения $f : A \to B$ и задайте формулой отображение f^{-1}, где $A = (2;+\infty)$, $B = (-\infty;0)$, $f(x) = \dfrac{1}{2-x}$.

ВАРИАНТ 7

1. Проверьте, является ли одно из множеств A и B подмножеством другого; равны ли эти множества:

   $A = \{y \in \mathbb{R} \mid y = \dfrac{7k-6}{4}, k \in \mathbb{Z}\}$; $B = \{y \in \mathbb{R} \mid y = 7k+1, k \in \mathbb{Z}\}$.

2. Изобразите на координатной плоскости множество точек $A = \{(x;y) \mid |x-y| = |x-y+1|\}$.

3. Докажите соотношения между множествами и изобразите их с помощью диаграмм Эйлера. В п. а) опровергните обратное включение контрпримером:

   а) $(A-B)-C \subset A \cap \overline{C}$; б) $A-(B-C) = (A-B) \cup (A-C)$.

4. Упростите и изобразите на координатной прямой следующие множества:

   а) $\overline{\overline{A} - B}$; б) $\overline{\overline{A} \cup \overline{B}}$; в) $\overline{\overline{A} \cap B}$,

   где $A = (-3; 6)$, $B = (-\infty; 0]$.

5. Найдите число всех натуральных чисел, не превосходящих 1000, которые не делятся на 13 или не делятся на 5 и делятся на 11.

6. На множестве A задано отношение ρ. Определите, какими из свойств рефлексивности, антирефлексивности, симметричности, антисимметричности, транзитивности и связности обладает это отношение:

   а) $x\rho y \Leftrightarrow x - y = 3$ или $x + y = 12$, $A = \{1, 2, 8, 10, 11\}$;

   б) $x\rho y \Leftrightarrow \dfrac{x}{x^2+1} \leq \dfrac{y}{y^2+1}$, $A = \mathbb{R}$.

7. А. Определите, будет ли отношение ρ на множестве A отношением эквивалентности:

   $\rho = \{(1; 1), (5; 5), (7; 7), (10; 10), (1; 5), (1; 10), (5; 10), (10; 5), (5; 1), (10; 1)\}$, $A = \{1, 5, 7, 10\}$.

   Б. Пусть ρ и φ — отношения эквивалентности на некотором множестве; α — отношение на этом множестве такое, что $x\alpha y \Leftrightarrow x\rho y$ или $x\varphi y$. Будет ли отношение α отношением эквивалентности?

8. Докажите, что отношение ρ на множестве A является отношением эквивалентности, и постройте фактор-множество множества A по отношению ρ:

   а) $A = \{a, b, c, d, e\}$, отношение ρ задано графом, изображенным на рисунке 14;

   б) $x\rho y \Leftrightarrow \dfrac{x}{y} > 0$; $A = \mathbb{Z} - \{0\}$.

9. Проверьте, будет ли данное отношение отношением порядка на данном множестве. Если будет, то укажите вид отношения порядка и найдите экстремальные элементы по данному отношению:

   а) $x\rho y \Leftrightarrow x - y > 2$, $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$;

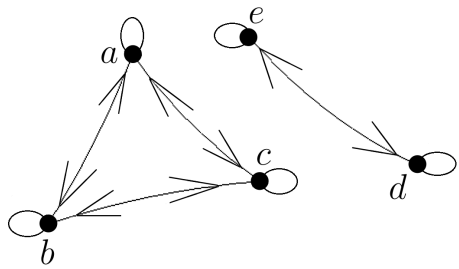


Рис. 14

б) отношение «меньше» на множестве действительных чисел.

10. А. Найдите образ отображения $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, определенного правилом $f : y = \dfrac{1}{|\sin x| + 3}$.

    Б. Пусть $A = \{(x; y) \,|\, y = 2x + 3\}$. Найдите $f(A)$ для отображения $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : (x; y) \mapsto (-x; -y)$. Изобразите множества A и $f(A)$ и опишите геометрический смысл отображения f.

    В. Найдите прообраз множества $\{0, 1\}$ при отображении $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, где $f(x) = \cos x$.

11. Определите вид отображения $\mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = \log_2(x^2 + 4x + 5)$.

12. Найдите произведения fg и gf отображений f и g, где $f(x) = \lg(x + 1)$ и $g(x) = x^2$. Найдите области определения и множества значений данных отображений и их произведений.

13. Докажите обратимость отображения $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ и задайте формулой отображение f^{-1}, где $f(x) = \sqrt{x}$.

ВАРИАНТ 8

1. Проверьте, является ли одно из множеств A и B подмножеством другого; равны ли эти множества:

   $A = \{y \in \mathbb{R} \,|\, y = 11k - 8, k \in \mathbb{Z}\}$;
   $B = \{y \in \mathbb{R} \,|\, y = 11k + 3, k \in \mathbb{Z}\}$.

2. Изобразите на координатной плоскости множество точек $A = \{(x; y) \,|\, (x - |x|)^2 + (y - |y|)^2 \leq 4\}$.

3. Докажите соотношения между множествами и изобразите их с помощью диаграмм Эйлера. В п. а) опровергните обратное включение контрпримером:

   а) $((A-B)\cup(B-A))\cap C\subset C-\overline{A\cup B}$;

   б) $(A-B)\cup(B-A)=(A\cup B)-(A\cap B)$.

4. Упростите и изобразите на координатной прямой следующие множества:

   а) $\overline{\overline{A}\cup\overline{B}}$; б) $\overline{A\cap\overline{B}}$; в) $\overline{\overline{A}-B}$,

   где $A=[7;+\infty)$, $B=(-3;2]$.

5. Найдите число всех натуральных чисел, не превосходящих 1000, которые делятся на 3 или делятся на 5 и не делятся на 7.

6. На множестве A задано отношение ρ. Определите, какими из свойств рефлексивности, антирефлексивности, симметричности, антисимметричности, транзитивности и связности обладает это отношение:

   а) $\rho=\{(3;2),(1;1),(2;3),(3;3),(2;2)\}$, $A=\{1,2,3,4\}$;

   б) $x\rho y\Leftrightarrow x\le 2$ или $y\ge 0$, $A=\mathbb{R}$.

7. А. Определите, будет ли отношение ρ на множестве A отношением эквивалентности:

   $\rho=\{(2;3),\ (1;2),\ (1;3),\ (2;1),\ (1;1),\ (3;1),\ (3;2),\ (2;2),\ (3;3),\ (4;4)\}$, $A=\{1,2,3,4\}$.

   Б. Докажите, что симметричное и транзитивное отношение ρ на множестве M является отношением эквивалентности тогда и только тогда, когда для любого $x\in M$ существует $y\in M$ такое, что $x\rho y$.

8. Докажите, что отношение ρ на множестве A является отношением эквивалентности, и постройте фактор-множество множества A по отношению ρ:

   а) $a\rho b\Leftrightarrow a-b\,\vdots\,3$, $A=\mathbb{Z}$;

   б) $\rho=\{(1;1),(1;2),(2;2),(2;1),(3;3),(4;4)\}$, $A=\{1,2,3,4\}$.

9. Проверьте, будет ли данное отношение отношением порядка на данном множестве. Если будет, то укажите вид отношения порядка и найдите экстремальные элементы по данному отношению:

   а) $\rho = \{(1;5),(3;5),(1;3),(4;2)\}$, $A = \{1,2,3,4,5\}$;

   б) A — множество всех непрерывных функций на $[0;1]$; $f\rho g \Leftrightarrow f(0) < g(0)$.

10. А. Найдите образ отображения $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, определенного правилом $f : y = 2x^2 + 1$.

    Б. Пусть $A = \{(x;y) \,|\, y = -x+2\}$. Найдите $f(A)$ для отображения $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : (x;y) \mapsto (x;-y)$. Изобразите множества A и $f(A)$ и опишите геометрический смысл отображения f.

    В. Найдите прообраз множества $\{0;1\}$ при отображении $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, где $f(x) = \left(\dfrac{1}{3}\right)^{x^2-2x-1}$.

11. Определите вид отображения $\mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = 2x^5 - 1$.

12. Найдите произведения fg и gf отображений f и g, где $f(x) = \operatorname{tg} x + 1$ и $g(x) = x^3 - 2$.

13. Докажите обратимость отображения $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ и задайте формулой отображение f^{-1}, где $A = [0;+\infty)$, $B = [0;+\infty)$, $f(x) = \sqrt{x^2+1}$.

ВАРИАНТ 9

1. Проверьте, является ли одно из множеств A и B подмножеством другого; равны ли эти множества:

   $A = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x = 7k + 4, k \in \mathbb{Z}\}$;

   $B = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x = \dfrac{7k-3}{3}, k \in \mathbb{Z}\}$.

2. Изобразите на координатной плоскости множество точек $A = \{(x;y) \,|\, \sqrt{4y - x^2 - y^2} \geq 0\}$.

3. Докажите соотношения между множествами и изобразите их с помощью диаграмм Эйлера. В п. а) опровергните обратное

включение контрпримером:

а) $A \cap B \subset (A \cup B) - (A - B)$;

б) $(A - B) \cup (B - A) \cup (A \cap B) = A \cup B$.

4. Упростите и изобразите на координатной прямой следующие множества:

   а) $\overline{\overline{A} \cap \overline{B}}$; б) $\overline{\overline{A} - \overline{B}}$; в) $\overline{\overline{A} \cup B}$,

   где $A = [2; 4]$, $B = (3; +\infty)$.

5. Найдите число всех натуральных чисел, не превосходящих 1000, которые не делятся на 13 или не делятся на 19 и делятся на 7.

6. На множестве A задано отношение ρ. Определите, какими из свойств рефлексивности, антирефлексивности, симметричности, антисимметричности, транзитивности и связности обладает это отношение:

   а) $\rho = \{(a; b), (a; a), (c; c), (b; a), (b; b), (b; c)\}$, $A = \{a, b, c\}$;

   б) $x\rho y \Leftrightarrow x \leq 5$ или $y \geq -2$, $A = \mathbb{R}$.

7. А. Определите, будет ли отношение ρ на множестве A отношением эквивалентности:

   $\rho = \{(m; n), (m; m), (n; n), (p; p), (n; m)\}$, $A = \{m, n, p\}$.

   Б. Докажите, что симметричное и транзитивное отношение ρ на некотором множестве является отношением эквивалентности тогда, когда оно обладает свойством связности. Является ли это условие необходимым?

8. Докажите, что отношение ρ на множестве A является отношением эквивалентности, и постройте фактор-множество множества A по отношению ρ:

   а) $\rho = \{(1; 1), (2; 2), (3; 1), (5; 5), (1; 6), (3; 3), (6; 1), (5; 2), (4; 4), (1; 3), (6; 6), (3; 6), (6; 3), (2; 5)\}$, $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$;

   б) $x\rho y \Leftrightarrow x - y \,\vdots\, 6$, $A = \mathbb{Z}$.

9. Проверьте, будет ли данное отношение отношением порядка на данном множестве. Если будет, то укажите вид порядка и найдите экстремальные элементы по данному отношению:

а) $\rho = \{(1;2),(1;3),(1;4),(5;5),(3;3),(1;5),(4;3),(1;1),(2;2),(4;4),(2;3),(6;6)\}$, $A = \{1,2,3,4,5,6\}$;

б) отношение «не больше» на множестве действительных чисел.

10. А. Найдите образ отображения $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, определенного правилом $f : y = \lg(x^2+1)$.

    Б. Пусть $A = \{(x;y) \mid y = 2x+3\}$. Найдите $f(A)$ для отображения $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : (x;y) \mapsto (-x;y)$. Изобразите множества A и $f(A)$ и опишите геометрический смысл отображения f.

    В. Найдите прообраз множества $\{0;-1\}$ при отображении $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, где $f(x) = \sin x$.

11. Определите вид отображения $\mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = 3^{2x} + x$.

12. Найдите произведения fg и gf отображений f и g, где $f(x) = \sqrt{x+2}$, $g(x) = 2^x$.

13. Докажите обратимость отображения $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ и задайте формулой отображение f^{-1}, где $f(x) = 2^x - 1$.

ВАРИАНТ 10

1. Проверьте, является ли одно из множеств A и B подмножеством другого; равны ли эти множества:

   $A = \{y \in \mathbb{R} \mid y = 13k - 7, k \in \mathbb{Z}\}$;
   $B = \{y \in \mathbb{R} \mid y = 13k + 6, k \in \mathbb{Z}\}$.

2. Изобразите на координатной плоскости множество точек $A = \{(x;y) \mid |x| + |y+1| \le 1\}$.

3. Докажите соотношения между множествами и изобразите их с помощью диаграмм Эйлера. В п. а) опровергните обратное включение контрпримером:

   а) $A \cap B \subset (A \cup B) - (A - B)$;

   б) $(A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$.

4. Упростите и изобразите на координатной прямой следующие множества:

а) $\overline{\overline{A}-\overline{B}}$; б) $\overline{A\cap\overline{B}}$; в) $\overline{\overline{A}\cup B}$,

где $A=(-\infty;2]$, $B=(-3;+\infty)$.

5. Найдите число всех натуральных чисел, не превосходящих 1000, которые делятся на 2 или делятся на 5 и не делятся на 17.

6. На множестве A задано отношение ρ. Определите, какими из свойств рефлексивности, антирефлексивности, симметричности, антисимметричности, транзитивности и связности обладает это отношение:

   а) $\rho=\{(1;2),(1;3),(4;5),(1;4),(5;5),(3;3),(4;4),(2;3),(6;6)\}$, $A=\{1,2,3,4,5,6\}$;

   б) $x\rho y \Leftrightarrow 2x\le 3y$, $A=\mathbb{Q}$.

7. А. Определите, будет ли отношение ρ на множестве A отношением эквивалентности:

   $\rho=\{(a;a),(b;b),(c;c)\}$, $A=\{a,b,c\}$.

   Б. Пусть ρ — отношение эквивалентности на множестве $\mathbb{N}$. Докажите: 1) если $1\rho 7$ и $6\rho 7$ и $5\rho 6$, то $1\rho 5$; 2) если $3\not\rho 1$ и $3\rho 4$, то $1\not\rho 4$.

8. Докажите, что отношение ρ на множестве A является отношением эквивалентности, и постройте фактор-множество множества A по отношению ρ:

   а) $\rho=\{(a;a),(b;b),(c;c),(b;a),(a;b),(b;c),(a;c),(c;b),(c;a),(d;e),(e;e),(e;d),(d;d),(f;f)\}$, $A=\{a,b,c,d,e,f\}$;

   б) A — множество всех непрерывных на отрезке $[0;1]$ функций, $f\rho g \Leftrightarrow f(1)=g(1)$.

9. Проверьте, будет ли данное отношение отношением порядка на данном множестве. Если будет, то укажите вид отношения порядка и найдите экстремальные элементы по данному отношению:

   а) $\rho=\{(1;2),(3;2),(1;3)\}$, $A=\{1,2,3\}$;

   б) $x\rho y \Leftrightarrow x^2<y^2$, $x,y\in\mathbb{N}$.

10. А. Найдите образ отображения $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, определенного правилом $f : y = \dfrac{2}{\cos^2 x + 1}$.

    Б. Пусть $A = \{(x; y) \mid y = -x + 2\}$. Найдите $f(A)$ для отображения $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : (x; y) \mapsto (x - 2; y + 2)$. Изобразите множества A и $f(A)$ и опишите геометрический смысл отображения f.

    В. Найдите прообраз множества $\{0; -1\}$ при отображении $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, где $f(x) = \cos x + 1$.

11. Определите вид отображения $\mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = x^3 + 3x$.

12. Найдите произведения fg и gf отображений f и g, если $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$, $g(x) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$. Найдите области определения и множества значений данных отображений и их произведений.

13. Докажите обратимость отображения $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ и задайте формулой отображение f^{-1}, где $f(x) = \ln x$.

ИНДИВИДУАЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ № 3
Метод математической индукции

ВАРИАНТ 1

1. Выведите формулу для вычисления суммы

$$S_n = \frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)},$$

где $n \in \mathbb{N}$.

2. Докажите, что при любом натуральном n верно равенство:

а) $1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n-1)^2 = \dfrac{n\cdot(2n-1)\cdot(2n+1)}{3}$;

б) $\dfrac{3}{4} + \dfrac{5}{36} + \ldots + \dfrac{2n+1}{n^2\cdot(n+1)^2} = 1 - \dfrac{1}{(n+1)^2}$;

в) $1\cdot 2 + 2\cdot 5 + 3\cdot 8 + \ldots + n\cdot(3n-1) = n^2\cdot(n+1)$.

3. Докажите, что при любом натуральном n, большем 1, справедливо неравенство $n! < \left(\dfrac{n+1}{2}\right)^n$.

4. Докажите неравенство $2^n > 2n+1$ для всех натуральных $n \geq 3$.

5. Докажите, что: а) $(\forall n \in \mathbb{N})(6^{2n-1} + 1 \,\vdots\, 7)$;

б) $(\forall n \in \mathbb{N})(3^{2n+3} - 24n + 37 \,\vdots\, 64)$.

6. Докажите, что всякий квадрат можно разрезать на n квадратов для любого n, начиная с 6.

ВАРИАНТ 2

1. Выведите формулу для вычисления суммы

$$S_n = \frac{1}{1\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 7} + \ldots + \frac{1}{(3n-2)\cdot(3n+1)}.$$

2. Докажите, что при любом натуральном n верно равенство:

а) $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \ldots + (-1)^n \cdot n^2 = (-1)^{n-1} \cdot \dfrac{n \cdot (n+1)}{2}$;

б) $\dfrac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5} + \dfrac{2}{3 \cdot 5 \cdot 7} + \ldots + \dfrac{n}{(2n-1) \cdot (2n+1) \cdot (2n+3)} =$
$= \dfrac{n \cdot (n+1)}{2 \cdot (2n+1) \cdot (2n+3)}$;

в) $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}$.

3. Докажите, что при любом натуральном $n \geq 5$ выполняется неравенство $2^n > n^2$.

4. Докажите неравенство $\dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + \cdots + \dfrac{1}{n^2} < \dfrac{n-1}{n}$ для любых натуральных n, отличных от 1.

5. Докажите, что: а) $(\forall n \in \mathbb{N})(10^n + 18n - 28 \,\vdots\, 27)$;

б) $(\forall n \in \mathbb{N})(11^{n+2} + 12^{2n+1} \,\vdots\, 133)$.

6. В плоскости проведено n прямых, из которых никакие две не параллельны и никакие три не проходят через одну точку. На сколько частей разбивают плоскость эти прямые?

ВАРИАНТ 3

1. Выведите формулу для вычисления суммы

$$S_n = -1 + 3 - 5 + 7 - 9 + \ldots + (-1)^n \cdot (2n-1),$$

где $n \in \mathbb{N}$.

2. Докажите, что при любом натуральном n верно равенство:

а) $\dfrac{1^2}{1 \cdot 3} + \dfrac{2^2}{3 \cdot 5} + \ldots + \dfrac{n^2}{(2n-1) \cdot (2n+1)} = \dfrac{n \cdot (n+1)}{4n+2}$;

б) $\dfrac{1}{1 \cdot 5} + \dfrac{1}{5 \cdot 9} + \dfrac{1}{9 \cdot 13} + \ldots + \dfrac{1}{(4n-3) \cdot (4n+1)} = \dfrac{n}{4n+1}$;

в) $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \ldots + (-1)^{n+1} \cdot n^2 = (-1)^{n-1} \cdot \dfrac{n \cdot (n+1)}{2}$.

3. Докажите, что при любом натуральном $n > 1$ верно неравенство
$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2^n - 1} < n.$$

4. Докажите, что при любом натуральном n:
$$\frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \ldots + \frac{1}{(2n+1)^2} < \frac{n}{4n+4} < \frac{1}{4}.$$

5. Докажите, что: а) $(\forall n \in \mathbb{N})(9^{n+1} - 8n - 9 \,\vdots\, 16)$;
б) $(\forall n \in \mathbb{N})(2^{5n+3} + 5^n \cdot 3^{n+2} \,\vdots\, 17)$.

6. В плоскости проведено n окружностей так, что каждые две из них пересекаются в двух точках и никакие три из них не имеют общих точек. Докажите, что плоскость разбивается этими окружностями на $n^2 - n + 2$ частей.

ВАРИАНТ 4

1. Выведите формулу для вычисления суммы
$$S_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n \cdot (n+1)},$$
где $n \in \mathbb{N}$.

2. Докажите, что при любом натуральном n верно равенство:
а) $\frac{1}{2} \cdot 2! + \frac{2}{2^2} \cdot 3! + \frac{3}{2^3} \cdot 4! + \ldots + \frac{n}{2^n} \cdot (n+1)! = \frac{(n+2)!}{2^n} - 2$;
б) $\frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{6}{5 \cdot 7} + \frac{20}{7 \cdot 9} + \ldots + \frac{2n-1}{(2n+1) \cdot (2n+3)} \cdot 2^{n-1} = \frac{2^n}{2n+3} - \frac{1}{3}$;
в) $\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \ldots + \frac{1}{(3n-2) \cdot (3n+1)} = \frac{n}{3n+1}$.

3. Докажите, что при любом натуральном n, большем 1, верно неравенство
$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2^n - 1} > \frac{n}{2}.$$

4. Докажите неравенство $2^n > n^2 + n + 2$, где $n \in \mathbb{N}$ и $n \geq 5$.

5. Докажите, что: а) $(\forall n \in \mathbb{N})(7^{n+2} + 8^{2n+1} \vdots 57)$;

   б) $(\forall n \in \mathbb{N})(2^{n+2} \cdot 3^n + 5n - 4 \vdots 25)$.

6. Докажите, что n прямых, имеющих общую точку и лежащих в одной плоскости, делят плоскость на $2n$ частей.

ВАРИАНТ 5

1. Выведите формулу для вычисления суммы

$$S_n = 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + n \cdot n!,$$

   где $n \in \mathbb{N}$.

2. Докажите, что при любом натуральном n верно равенство:

   а) $\dfrac{1}{3} + \dfrac{3}{3^2} + \dfrac{5}{3^3} + \ldots + \dfrac{2n-1}{3^n} = 1 - \dfrac{n+1}{3^n}$;

   б) $\dfrac{1^2}{1 \cdot 3} + \dfrac{2^2}{3 \cdot 5} + \ldots + \dfrac{n^2}{(2n-1) \cdot (2n+1)} = \dfrac{n \cdot (n+1)}{2 \cdot (2n+1)}$;

   в) $1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \ldots + n \cdot (n+1) \cdot (n+2) =$
   $= \dfrac{1}{4} \cdot n \cdot (n+1) \cdot (n+2) \cdot (n+3)$.

3. Докажите, что при любом натуральном $n > 1$ верно неравенство

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \ldots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2}.$$

4. Докажите неравенство $5^n > 7n - 3$, где $n \in \mathbb{N}$.

5. Докажите, что: а) $(\forall n \in \mathbb{N})(3^{2n+1} + 5 \vdots 8)$;

   б) $(\forall n \in \mathbb{N})(2^{n+5} \cdot 3^{4n} + 5^{3n+1} \vdots 37)$.

6. Докажите, что правильный треугольник можно разбить на n правильных треугольников для любого n, начиная с 6.

ВАРИАНТ 6

1. Выведите формулу для вычисления суммы

$$S_n = 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1),$$

где $n \in \mathbb{N}$.

2. Докажите, что при любом натуральном n верно равенство:
а) $5 + 45 + 325 + \ldots + (4n + 1) \cdot 5^n = n \cdot 5^n$;
б) $\dfrac{3}{1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 5} + \dfrac{4}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6} + \ldots + \dfrac{n+2}{n \cdot (n+1) \cdot (n+3) \cdot (n+4)} =$
$= \dfrac{n \cdot (n+5)}{8 \cdot (n+1) \cdot (n+4)}$;
в) $\dfrac{1}{1 \cdot 5} + \dfrac{1}{5 \cdot 9} + \ldots + \dfrac{1}{(4n-3) \cdot (4n+1)} = \dfrac{n}{4n+1}$.

3. Докажите, что при любом натуральном n верно неравенство

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{3n+1} > 1.$$

4. Докажите неравенство $4^n \geq 3^n + n^2$, где $n \in \mathbb{N}$.

5. Докажите, что: а) $(\forall n \in \mathbb{N})(n^3 + 11n \,\vdots\, 6)$;
б) $(\forall n \in \mathbb{N})(7^n + 3^{n+1} \,\vdots\, 4)$.

6. На какое наибольшее число частей могут разбивать плоскость n треугольников?

ВАРИАНТ 7

1. Выведите формулу для вычисления произведения

$$S_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{1}{n+1}\right),$$

где $n \in \mathbb{N}$.

2. Докажите, что при любом натуральном n верно равенство:

   а) $\dfrac{2}{3\cdot 4}+\dfrac{3\cdot 2}{4\cdot 5}+\dfrac{4\cdot 2^2}{5\cdot 6}+\ldots+\dfrac{(n+1)\cdot 2^{n-1}}{(n+2)\cdot(n+3)}=\dfrac{2^n}{n+3}-\dfrac{1}{3}$;

   б) $2+16+56+\ldots+(3n-2)\cdot 2^n=10+(3n-5)\cdot 2^{n+1}$;

   в) $1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\ldots+n\cdot(n+1)=\dfrac{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)}{3}$.

3. Докажите неравенство $2^n>2n+1$, где $n\in\mathbb{N}$ и $n\geq 3$.

4. Докажите неравенство $4^n\geq 3^n+2^n$, где $n\in\mathbb{N}$ и $n\geq 2$.

5. Докажите, что: а) $(\forall n\in\mathbb{N})(10^n+45n-1\,\vdots\,27)$;

   б) $(\forall n\in\mathbb{N})(7\cdot 5^{2n-1}+2^{3n+1}\,\vdots\,17)$.

6. На плоскости изображено несколько окружностей. В каждой из них проведено по хорде. Докажите, что получившуюся «карту» можно раскрасить тремя красками так, чтобы любые две соседние области были покрашены разными цветами.

ВАРИАНТ 8

1. Выведите формулу для вычисления произведения

$$S_n=\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{9}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right),$$

   где $n\in\mathbb{N}$.

2. Докажите, что при любом натуральном n верно равенство:

   а) $\dfrac{1}{2\cdot 5}+\dfrac{1}{5\cdot 8}+\ldots+\dfrac{1}{(3n-1)\cdot(3n+2)}=\dfrac{1}{3}\cdot\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3n+2}\right)$;

   б) $3+20+168+\ldots+(2n+1)\cdot 2^{n-1}\cdot n!=2^n\cdot(n+1)!-1$;

   в) $1^3+3^3+5^3+\ldots+(2n-1)^3=n^2\cdot(2n^2-1)$.

3. Докажите неравенство

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}>\frac{13}{24},$$

   где $n\in\mathbb{N}$ и $n\geq 2$.

4. Докажите неравенство $3^n \geq 2^n + n$, где $n \in \mathbb{N}$.

5. Докажите, что: а) $(\forall n \in \mathbb{N})(3^n + 2n - 1 \,\vdots\, 4)$;

   б) $(\forall n \in \mathbb{N})(5^n + 3^{2n} + 2 \,\vdots\, 4)$.

6. Докажите, что число диагоналей выпуклого n-угольника $(n \geq 3)$ равно $\dfrac{n \cdot (n-3)}{2}$.

ВАРИАНТ 9

1. Выведите формулу для вычисления суммы

$$S_n = 1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{n-1},$$

   где $n \in \mathbb{N}$.

2. Докажите, что при любом натуральном n верно равенство:

   а) $\dfrac{1 \cdot 7}{3 \cdot 5} + \dfrac{3 \cdot 9}{5 \cdot 7} + \ldots + \dfrac{(2n-1) \cdot (2n+5)}{(2n+1) \cdot (2n+3)} = \dfrac{n \cdot (6n+1)}{3 \cdot (2n+3)}$;

   б) $\dfrac{1}{1 \cdot 3} + \dfrac{1}{3 \cdot 5} + \dfrac{1}{5 \cdot 7} + \ldots + \dfrac{1}{(2n-1) \cdot (2n+1)} = \dfrac{n}{2n+1}$;

   в) $1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 10 + \ldots + n \cdot (3n+1) = n \cdot (n+1)^2$.

3. Докажите, что при любом натуральном $n \geq 2$ справедливо неравенство

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}.$$

4. Найдите все натуральные n, при которых верно неравенство $2^n > 2n^2 - 3n + 1$.

5. Докажите, что: а) $(\forall n \in \mathbb{N})(5^n + 12n + 15 \,\vdots\, 16)$;

   б) $(\forall n \in \mathbb{N})(6^{n+1} + 7^{2n-1} \,\vdots\, 43)$.

6. Банк имеет неограниченное количество трех- и пятирублевых купюр. Докажите, что он может выдать ими без сдачи любое число рублей, начиная с 8.

ВАРИАНТ 10

1. Выведите формулу для вычисления суммы

$$S_n = 1^3 + 2^3 + \ldots + n^3,$$

где $n \in \mathbb{N}$.

2. Докажите, что при любом натуральном n верно равенство:

а) $\dfrac{1}{1 \cdot 3} + \dfrac{7}{3 \cdot 5} + \ldots + \dfrac{2n^2 - 1}{(2n-1) \cdot (2n+1)} = \dfrac{n^2}{2n+1}$;

б) $(n+1) \cdot (n+2) \cdot \ldots \cdot (n+n) = 2^n \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)$;

в) $\dfrac{0}{1!} + \dfrac{1}{2!} + \dfrac{2}{3!} + \ldots + \dfrac{n-1}{n!} = 1 - \dfrac{1}{n!}$.

3. Докажите, что для любых $n \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2 \cdot \sqrt{n}.$$

4. Докажите неравенство $2^{n-1} > n \cdot (n+1)$, где $n \in \mathbb{N}$ и $n \geq 7$.

5. Докажите, что: а) $(\forall n \in \mathbb{N})(3^{2n} - 8n - 1 \,\vdots\, 16)$;

б) $(\forall n \in \mathbb{N})(5 \cdot 9^{n-1} + 2^{4n-3} \,\vdots\, 7)$.

6. Кусок бумаги разрешается рвать на 4 или на 6 кусков. Докажите, что по этим правилам его можно разорвать на любое число кусков, начиная с 9.

ИНДИВИДУАЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ № 4
Комплексные числа

ВАРИАНТ 1

1. Вычислите: а) $(2+i)\cdot(3-i)+(2+3i)\cdot(3+4i)$;
   б) $\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}-(1-i)^2$; в) $\dfrac{(2+i)^n}{(-1+2i)^{n+2}}$; г) $\sqrt{3+4i}$.

2. Решите уравнение: а) $z^2+z+1=0$;
   б) $(2-i)z^2-(5+i)z+(2+2i)=0$; в) $(1-i)z-3i\overline{z}=2-i$.

3. Докажите, что всякое комплексное число z, не равное -1, модуль которого равен 1, может быть представлено в следующей форме: $z=\dfrac{1+ti}{1-ti}$, где t — действительное число.

4. Представьте в тригонометрической форме комплексное число: а) $-4i$; б) $-1-i$; в) $\sqrt{2}+1+i$.

5. Изобразите на комплексной плоскости множество:
   а) $\{z\in\mathbb{C}\,|\,|z|=1\}$; б) $\{z\in\mathbb{C}\,|\,|z-2|=\mathrm{Re}(z)+2\}$.

6. Вычислите: а) $(1+i\sqrt{3})\cdot(1+i)\cdot(\cos\varphi+i\sin\varphi)$;
   б) $\dfrac{(-1+i\sqrt{3})^{15}}{(1-i)^{20}}$; в) $\sqrt[3]{i}$; г) $\sqrt[6]{\dfrac{1-i}{\sqrt{3}+i}}$.

7. Докажите, что $(1+i)^n=2^{\frac{n}{2}}\cdot\left(\cos\dfrac{\pi n}{4}+i\sin\dfrac{\pi n}{4}\right)$, где $n\in\mathbb{Z}$.

8. Выразите $\operatorname{tg}5x$ через $\operatorname{tg}x$.

9. Представьте $\sin^5x\cdot\cos^3x$ в виде многочлена первой степени от тригонометрических функций аргументов, кратных x.

10. Докажите, что $\sin x+\sin 2x+\ldots+\sin nx=\dfrac{\sin\dfrac{n+1}{2}x\cdot\sin\dfrac{n}{2}x}{\sin\dfrac{x}{2}}$.

11. Вычислите $1 + 2\varepsilon + 3\varepsilon^2 + \ldots + n\varepsilon^{n-1}$, где ε — корень n-й степени из 1.

ВАРИАНТ 2

1. Вычислите: а) $(2+i)\cdot(7+3i)-(1+2i)\cdot(5+3i)$;

   б) $\dfrac{(2+3i)\cdot(4-i)}{5-i}$; в) $\dfrac{(1+2i)^{n+2}}{(2-i)^n}$; г) $\sqrt{-15+8i}$.

2. Решите уравнение: а) $z^4+4=0$;

   б) $z^2-(3+2i)z+(5+5i)=0$; в) $z\cdot\overline{z}-2z=3-i$.

3. Докажите, что сумма и произведение двух комплексных чисел являются действительными числами тогда и только тогда, когда данные числа или сопряжены, или оба действительные.

4. Представьте в тригонометрической форме комплексное число: а) $5i$; б) $\sqrt{3}+i$; в) $1+(2+\sqrt{3})i$.

5. Изобразите на комплексной плоскости множество:

   а) $\left\{z\in\mathbb{C}\;\middle|\;\arg(z)=\dfrac{\pi}{3}\right\}$; б) $\{z\in\mathbb{C}\,|\,|z+2|-|z+2|=3\}$.

6. Вычислите: а) $\dfrac{\cos\varphi+i\sin\varphi}{\cos\alpha-i\sin\alpha}$; б) $\left(\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}$;

   в) $\sqrt[3]{2-2i}$; г) $\sqrt[8]{\dfrac{1+i}{\sqrt{3}-i}}$.

7. Докажите, что $(\sqrt{3}-i)^n=2^n\cdot\left(\cos\dfrac{\pi n}{6}-i\sin\dfrac{\pi n}{6}\right)$, где $n\in\mathbb{Z}$.

8. Выразите $\cos 7x$ через $\cos x$ и $\sin x$.

9. Представьте $\sin^6 x$ в виде многочлена первой степени от тригонометрических функций аргументов, кратных x.

10. Вычислите сумму $\dfrac{1}{2}+\cos x+\cos 2x+\ldots+\cos(nx)$, где $n\in\mathbb{N}$.

11. Вычислите сумму всех первообразных корней 30-й степени из 1.

ВАРИАНТ 3

1. Вычислите: а) $(4+i)\cdot(5+3i)-(3+i)\cdot(3-i)$;
   б) $\dfrac{(5+2i)\cdot(4-3i)}{(1-2i)\cdot(1+3i)}$; в) $\dfrac{(1-2i)^n}{(2+i)^{n-2}}$; г) $\sqrt{8+6i}$.

2. Решите уравнение: а) $z^3-27=0$;
   б) $z^2+(-7+2i)z+(13-i)=0$; в) $z\cdot\overline{z}+3\cdot(z-\overline{z})=4+3i$.

3. Докажите, что произведение двух комплексных чисел является действительным числом тогда и только тогда, когда одно из них отличается от сопряженного к другому действительным множителем.

4. Представьте в тригонометрической форме комплексное число: а) -5; б) $-2+2i$; в) $2+\sqrt{3}-i$.

5. Изобразите на комплексной плоскости множество:
   а) $\{z\in\mathbb{C}\,|\,|z|\le 2\}$; б) $\{z\in\mathbb{C}\,|\,|z-1|+|z+1|=3\}$.

6. Вычислите: а) $\dfrac{(1-i\sqrt{3})\cdot(\cos\varphi+i\sin\varphi)}{2\cdot(1-i)\cdot(\cos\alpha-i\sin\alpha)}$; б) $(1+i)^{25}$;
   в) $\sqrt[4]{-4}$; г) $\sqrt[4]{\dfrac{1-i}{1+i\sqrt{3}}}$.

7. Докажите, что $\left(\dfrac{1+i\cdot\operatorname{tg}\alpha}{1-i\cdot\operatorname{tg}\alpha}\right)^n=\dfrac{1+i\cdot\operatorname{tg}(n\alpha)}{1-i\cdot\operatorname{tg}(n\alpha)}$.

8. Выразите $\cos 5x$ через $\cos x$ и $\sin x$.

9. Представьте $\sin^5 x$ в виде многочлена первой степени от тригонометрических функций аргументов, кратных x.

10. Вычислите $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{2}\cos x+\dfrac{1}{4}\cos 2x+\ldots+\dfrac{1}{2^n}\cos(nx)\right)$.

11. Вычислите сумму всех первообразных корней 24-й степени из 1.

ВАРИАНТ 4

1. Вычислите: а) $\dfrac{(5+i)\cdot(7-6i)}{3+i}$; б) $(1+2i)^6$;
   в) $\dfrac{(1+i)^{n-2}}{(1-i)^n}$; г) $\sqrt{4-3i}$.

2. Решите уравнение: а) $z^3+27=0$;
   б) $z^2-5z+(4+10i)=0$; в) $z\cdot\overline{z}+3\cdot(z+\overline{z})=7$.

3. Докажите, что комплексное число z является чисто мнимым числом тогда и только тогда, когда $-z=\overline{z}$.

4. Представьте в тригонометрической форме комплексное число:
   а) 5; б) $-1+i\sqrt{3}$; в) $\dfrac{1+itg\alpha}{1-itg\alpha}$.

5. Изобразите на комплексной плоскости множество:
   а) $\{z\in\mathbb{C}\,|\,|z-1-i|<1\}$; б) $\{z\in\mathbb{C}\,|\,|\mathrm{Re}(z)+\mathrm{Im}(z)|<1\}$.

6. Вычислите: а) $\dfrac{\sin\varphi-i\cos\varphi}{\sin\alpha-i\cos\alpha}$; б) $\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}$;
   в) $\sqrt[6]{-27}$; г) $\sqrt[6]{\dfrac{1+i}{1-i\sqrt{3}}}$.

7. Докажите, что если $z+\dfrac{1}{z}=2\cos\varphi$, то $z^m+\dfrac{1}{z^m}=2\cos(m\varphi)$.

8. Выразите $\sin 8x$ через $\cos x$ и $\sin x$.

9. Представьте $\cos^4 x$ в виде многочлена первой степени от тригонометрических функций аргументов, кратных x.

10. Докажите, что если n — натуральное число, а φ — угол, удовлетворяющий условию $\sin\frac{\varphi}{2}=\frac{1}{2n}$, то
$$\cos\frac{\varphi}{2}+\cos\frac{3\varphi}{2}+\ldots+\cos\frac{(2n-1)\cdot\varphi}{2}=n\cdot\sin(n\varphi).$$

11. Вычислите сумму всех первообразных корней 15-й степени из 1.

ВАРИАНТ 5

1. Вычислите: а) i^{77}; б) $\dfrac{(1+2i)^2-(1-i)^2}{(3+2i)^3-(2+i)^2}$;

   в) $\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3$; г) $\sqrt{3-4i}$.

2. Решите уравнение: а) $z^3-1=0$;

   б) $z^2-(1+i)z+(6+3i)=0$; в) $z\cdot\overline{z}+3\cdot(z+\overline{z})=3i$.

3. Докажите, что комплексное число z является действительным числом тогда и только тогда, когда $z=\overline{z}$.

4. Представьте в тригонометрической форме комплексное число: а) $-3i$; б) $1-i\sqrt{3}$; в) $1+\cos\alpha+i\sin\alpha$, где $-\pi<\alpha<\pi$.

5. Изобразите на комплексной плоскости множество:

   а) $\{z\in\mathbb{C}\,|\,|z+3+4i|\le 5\}$; б) $\left\{z\in\mathbb{C}\;\middle|\;|arg(z)|<\dfrac{\pi}{6}\right\}$.

6. Вычислите: а) $\dfrac{(-1+i\sqrt{3})^{15}}{(1-i)^{20}}+\dfrac{(-1-i\sqrt{3})^{15}}{(1+i)^{20}}$;

   б) $\dfrac{\sin\varphi+i\cos\varphi}{-\sin\alpha-i\cos\alpha}$; в) $\sqrt[10]{512\cdot(1-i\sqrt{3})}$; г) $\sqrt[3]{\dfrac{8+24i}{3-i}}$.

7. Вычислите $(1+\cos\alpha+i\sin\alpha)^n$.

8. Выразите $\cos 6x$ через $\cos x$ и $\sin x$.

9. Представьте $\cos^3 x$ в виде многочлена первой степени от тригонометрических функций аргументов, кратных x.

10. Докажите, что
$$\cos^2 x+\cos^2 2x+\ldots+\cos^2 nx=\frac{n}{2}+\frac{\cos(n+1)x\cdot\sin(nx)}{2\sin x}.$$

11. Вычислите: $1+\varepsilon+\varepsilon^2+\ldots+\varepsilon^{n-1}$, где ε — первообразный корень степени $2n$ из 1.

ВАРИАНТ 6

1. Вычислите: а) $\dfrac{(5+i)\cdot(3+5i)}{2i}$; б) $(3+i)^3-(3-i)^3$;
   в) i^{-57}; г) $\sqrt{-15-8i}$.

2. Решите уравнение: а) $z^3+1=0$;
   б) $(3+i)z^2+(1-i)z-6i=0$; в) $z=-\overline{z}$.

3. Докажите тождество $|z+w|^2+|z-w|^2=2(|z|^2+|w|^2)$. Какой геометрический смысл имеет это тождество?

4. Представьте в тригонометрической форме комплексное число:
   а) -2; б) $-2-2i$; в) $\sin\alpha+i\cos\alpha$.

5. Изобразите на комплексной плоскости множество:
   а) $\{z\in\mathbb{C}\,|\,2<|z|<3\}$; б) $\{z\in\mathbb{C}\,|\,|\mathrm{Im}(z)|=1\}$.

6. Вычислите: а) $(1-i\sqrt{3})\cdot(1-i)\cdot(\cos\varphi-i\sin\varphi)$;
   б) $\left(1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{i}{2}\right)^{24}$; в) $\sqrt[8]{16}$; г) $\sqrt[3]{\dfrac{27-54i}{2+i}}$.

7. Упростите выражение $(1+w)^n$, где $w=\cos\dfrac{2\pi}{3}+i\sin\dfrac{2\pi}{3}$.

8. Выразите $\operatorname{tg}6x$ через $\operatorname{tg}x$.

9. Представьте $\sin^3x\cdot\cos^5x$ в виде многочлена первой степени от тригонометрических функций аргументов, кратных x.

10. Докажите, что
$$\sin^2x+\sin^2 2x+\ldots+\sin^2 nx=\frac{n}{2}-\frac{\cos(n+1)x\cdot\sin(nx)}{2\sin x}.$$

11. Докажите, что число первообразных корней n-й степени из 1 четное, если $n>2$.

ВАРИАНТ 7

1. Вычислите: а) $\dfrac{(1+3i)\cdot(8-i)}{(2+i)^2}$; б)$i^{98}$; в) $(1-2i)^4$;
   г) $\sqrt{8-6i}$.

2. Решите уравнение: а) $z^2 + 2z + 2 = 0$;
   б) $z^2 - (5 - 3i)z + (4 - 7i) = 0$; в) $z^2 = \overline{z}$.

3. Докажите, что комплексное число $w = \dfrac{1 - z}{1 + z}$, где $z \neq 1$, является чисто мнимым тогда и только тогда, когда $|z| = 1$.

4. Представьте в тригонометрической форме комплексное число:
   а) $-i$; б) $1 - i$; в) $\cos\alpha - i\sin\alpha$.

5. Изобразите на комплексной плоскости множество:
   а) $\{z \in \mathbb{C} \,|\, |\mathrm{Re}(z)| \leq 1\}$; б) $\{z \in \mathbb{C} \,|\, |z + 2| = \mathrm{Re}(z) + 2\}$.

6. Вычислите: а) $(1 - i\sqrt{3}) \cdot (1 + i) \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi)$;
   б) $(2 - \sqrt{3} + i)^{12}$; в) $\sqrt[6]{64}$; г) $\sqrt[4]{-\dfrac{18}{1 + i\sqrt{3}}}$.

7. Решите уравнение $(z + 1)^n + (z - 1)^n = 0$.

8. Выразите $\sin 7x$ через $\cos x$ и $\sin x$.

9. Представьте $\cos^6 x$ в виде многочлена первой степени от тригонометрических функций аргументов, кратных x.

10. Найдите сумму $\cos x + 2\cos 2x + 3\cos 3x + \ldots + n\cos(nx)$.

11. Докажите, что произведение корня степени n из 1 на корень степени m из 1 есть корень степени $n \cdot m$ из 1.

ВАРИАНТ 8

1. Вычислите: а) $\dfrac{(2 + i) \cdot (4 + i)}{1 + i}$; б) $\left(-\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3$;
   в) $(-i)^n$; г) $\sqrt{6 + 8i}$.

2. Решите уравнение: а) $z^2 - 3z + 9 = 0$;
   б) $(2 + i)z^2 - (5 - i)z + (2 - 2i) = 0$; в) $z^3 = \overline{z}$.

3. Докажите, что $x^2 + y^2 = (s^2 + t^2)^n$, если $x + yi = (s + ti)^n$.

4. Представьте в тригонометрической форме комплексное число:
а) i; б) $-\sqrt{3}+i$; в) $1-(2+\sqrt{3})i$.

5. Изобразите на комплексной плоскости множество:
а) $\{z \in \mathbb{C} \,|\, \arg(z)=0\}$; б) $\{z \in \mathbb{C} \,|\, -1 < \mathrm{Re}(iz) < 0\}$.

6. Вычислите: а) $\dfrac{(1+i\sqrt{3})\cdot(\cos\varphi - i\sin\varphi)}{2\cdot(1+i)\cdot(\cos\varphi + i\sin\varphi)}$;

б) $(1+i\sqrt{3})^{150}$; в) $\sqrt[4]{-72\cdot(1-i\sqrt{3})}$; г) $\sqrt[4]{-\dfrac{32}{9\cdot(1-i\sqrt{3})}}$.

7. Решите уравнение $(z+1)^n-(z-1)^n=0$.

8. Выразите $\sin 6x$ через $\cos x$ и $\sin x$.

9. Представьте $\cos^5 x$ в виде многочлена первой степени от тригонометрических функций аргументов, кратных x.

10. Найдите сумму $\sin x + 2\sin 2x + 3\sin 3x + \ldots + n\sin(nx)$.

11. Докажите, что если A — комплексное число, модуль которого равен 1, то все корни уравнения $\left(\dfrac{1+ix}{1-ix}\right)^m = A$ являются различными действительными числами.

ВАРИАНТ 9

1. Вычислите: а) $\dfrac{(3-i)\cdot(1-4i)}{2-i}$; б) $\left(-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3$; в) i^n;
г) $\sqrt{-7+24i}$.

2. Решите уравнение: а) $z^2-2z+4=0$;
б) $z^2-3z-10i=0$; в) $z\cdot\overline{z}+3\cdot(\overline{z}-z)=4-3i$.

3. Известно, что отношение сопряженных комплексных чисел равно 1, т. е. $\dfrac{z}{\overline{z}}=1$. Укажите верные и неверные утверждения:
а) z — всегда действительное число;
б) $\mathrm{Re}(z)=0$; в) $|z|=1$; г) $|\overline{z}|\neq 1$; д) $|\overline{z}|=|z|$.

4. Представьте в тригонометрической форме комплексное число:

   а) -1; б) $\sqrt{3}-i$; в) $1+i\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

5. Изобразите на комплексной плоскости множество:

   а) $\left\{z\in\mathbb{C}\;\middle|\;\arg(z)=\dfrac{\pi}{2}\right\}$; б) $\{z\in\mathbb{C}\,|\,|z-i|+|z+i|=4\}$.

6. Вычислите: а) $\dfrac{(1-i\sqrt{3})\cdot(\cos\varphi-i\sin\varphi)}{-2\cdot(1-i)\cdot(\cos\varphi+i\sin\varphi)}$;

   б) $(2-\sqrt{3}-i)^{12}$; в) $\sqrt[3]{1+i}$; г) $\sqrt[3]{\dfrac{2+i}{27-54i}}$.

7. Решите уравнение $(z+i)^n+(z-i)^n=0$.

8. Выразите $\cos 8x$ через $\cos x$ и $\sin x$.

9. Представьте $\sin^4 x$ в виде многочлена первой степени от тригонометрических функций аргументов, кратных x.

10. Найдите сумму $\cos\dfrac{2\pi}{n}+2\cos\dfrac{4\pi}{n}+\ldots+(n-1)\cos\dfrac{2(n-1)\pi}{n}$.

11. Составьте простейшее алгебраическое уравнение, корнем которого является длина стороны правильного 10-угольника, вписанного в круг радиуса 1.

ВАРИАНТ 10

1. Вычислите: а) $\dfrac{(1+i)^5}{(1-i)^3}$; б) $(1+i)\cdot(2+i)+\dfrac{5}{1+2i}$;

   в) $\dfrac{(1+i)^n}{(1-i)^{n-2}}$; г) $\sqrt{6+8i}$.

2. Решите уравнение: а) $z^2+z+5=0$;

   б) $z^2-(3-2i)z+(5-5i)=0$; в) $|z|-z=8+12i$.

3. Известно, что произведение сопряженных комплексных чисел равно 1, т. е. $z\cdot\overline{z}=1$. Укажите верные и неверные утверждения:

   а) z — действительное число;

б) $\mathrm{Re}(z) = 1$; в) $|z| = 1$; г) $|\overline{z}| = 1$;

д) $|z| = |\overline{z}|$.

4. Представьте в тригонометрической форме комплексное число:
а) 1; б) $-1 - i\sqrt{3}$; в) $2 + \sqrt{3} + i$.

5. Изобразите на комплексной плоскости множество:
а) $\{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| > 3\}$; б) $\{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Im}(z^2) > 2\}$.

6. Вычислите: а) $(1 - i\sqrt{3}) \cdot (1 + i) \cdot (\sin\varphi + i\cos\varphi)$;

б) $\left(1 + \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{i}{2}\right)^{24}$; в) $\sqrt[6]{2i}$; г) $\sqrt[3]{\dfrac{3+i}{8-24i}}$.

7. Вычислите $z^{14} + \frac{1}{z^{14}}$, если z есть корень уравнения $z + \frac{1}{z} = 1$.

8. Выразите $\cos 5x$ через $\cos x$ и $\sin x$.

9. Представьте $\sin^3 x$ в виде многочлена первой степени от тригонометрических функций аргументов, кратных x.

10. Найдите сумму $\sin\dfrac{2\pi}{n} + 2\sin\dfrac{4\pi}{n} + \ldots + (n-1)\sin\dfrac{2(n-1)\pi}{n}$.

11. Найдите сумму всех корней n-й степени из 1.

Заключение

Многие выпускники средних школ, поступив на первый курс вуза, испытывают серьезные затруднения при изучении математических дисциплин, будь то интегрированный курс высшей математики или отдельные математические курсы. Плохое усвоение студентами-первокурсниками многих математических фактов часто объясняется затруднениями при переводе с естественного языка на математический, непониманием значения и смысла математических предложений, характера логических связей в сложном математическом предложении. Также это связано с высоким уровнем абстракции вузовской математики и формализацией многих математических понятий.

В такой ситуации необходима специальная и целенаправленная работа, направленная на осознание студентами логико-языковой составляющей математики, формирование умений актуализации этой составляющей и использования общематематических методов при изучении всех математических дисциплин. Эта задача может быть наиболее успешно реализована посредством специального курса, предваряющего изучение всех математических дисциплин. Таким курсом является «Вводный курс математики».

Данное учебное пособие способствует логическому развитию студентов, пониманию ими особенностей логико-математического языка и общематематических понятий и методов и их применению при изучении различных разделов математики. Основные проблемы в изучении математики студентами первого курса состоят не только в незнании отдельных фактов элементарной математики, но и в слабом логическом развитии, в связи с чем основные дополнительные усилия в начале изучения математики в вузе нужно уделять формированию логического мышления студентов.

Таким образом, пособие «Вводный курс математики» помогает смягчить переход от школьного курса к высшей математике, выстраивая фундамент для дальнейшего ее изучения.

Список использованной литературы

1. Беран, Л. Упорядоченные множества / Л. Беран. – Москва : Наука, 1981. – 64 с.

2. Варпаховский, Ф. Л. Задачник-практикум по алгебре : учебное пособие для студентов-заочников 1 курса физико-математических факультетов педагогических институтов. Часть 1 / Ф. Л. Варпаховский, А. С. Солодовников. – Москва : Просвещение, 1982. – 80 с.

3. Виленкин, Н. Я. Комбинаторика / Н. Я. Виленкин. – Москва : Наука, 1969. – 328 с.

4. Виленкин, Н. Я. Алгебра и математический анализ : учебное пособие для 10 кл. и кл. с углубленным изучением математики / Н. Я. Виленкин, О. С. Ивашев-Мусатов, С. И. Шварцбурд. – 4-е изд. – Москва : Просвещение, 1995. – 335 с.

5. Виленкин, Н. Я. Алгебра и математический анализ : учебное пособие для 11 кл. и кл. с углубленным изучением математики / Н. Я. Виленкин, О. С. Ивашев-Мусатов, С. И. Шварцбурд. – 5-е изд. – Москва : Просвещение, 1996. – 289 с.

6. Генкин, С. А. Ленинградские математические кружки : пособие для внеклассной работы / С. А. Генкин, И. В. Итенберг, Д. В. Фомин. – Киров : Аса, 1994. – 272 с.

7. Игошин, В. И. Задачник-практикум по математической логике : учебное пособие для студентов-заочников физико-математических факультетов педагогических институтов. – Москва : Просвещение, 1986. – 156 с.

8. Избранные вопросы математики, 9 класс / сост. О. А. Боковнев, В. В. Фирсов, С. И. Шварцбурд. – Москва : Просвещение, 1979. – 192 с.

9. Исаев, И. М. Задания по алгебре для самостоятельной работы студентов 1 курса факультета математики и информатики /

И. М. Исаев, Б. Д. Пайсон, Н. А. Поцелуев. – Барнаул : БГПУ, 2008. – 47 с.

10. Куликов, Л. Я. Алгебра и теория чисел / Л. Я. Куликов. – Москва : Высшая школа, 1979. – 559 с.

11. Куликов, Л. Я. Сборник задач по алгебре и теории чисел : учебное пособие для студентов физико-математических специальностей педагогических институтов / Л. Я. Куликов, А. И. Москаленко, А. А. Фомин. – Москва : Просвещение, 1993. – 288 с.

12. Курош, А. Г. Курс высшей алгебры / А. Г. Курош. – Москва : Наука, 1965. – 431 с.

13. Ляпин, С. Е. Сборник задач по элементарной алгебре / С. Е. Ляпин, И. В. Баранова, З. Г. Борчугова. – Москва : Просвещение, 1973. – 351 с.

14. Моторинский, Ю. А. Вводный курс математики : методическая разработка / Ю. А. Моторинский, Б. Д. Пайсон. – Барнаул : Изд-во БГПУ, 2006. – 69 с.

15. Никольская, И. Л. Знакомство с математической логикой / И. Л. Никольская. – Москва : Флинта, 1998. – 128 с.

16. Одинцов, П. К. Числовые системы : учебное пособие для педагогических институтов и факультетов повышения квалификации / П. К. Одинцов. – Москва ; Барнаул : БГПИ, 1989. – 132 с.

17. Пайсон, Б. Д. Математическая логика / Б. Д. Пайсон. – Барнаул : БГПУ, 2006. – 168 с.

18. Сборник задач по алгебре / под ред. А. И. Кострикина. – Москва : Наука, 1987. – 264 с.

19. Соминский, И. С. Метод математической индукции / И. С. Соминский. – Москва : Наука, 1974. – 64 с.

20. Столл, Р. Множества. Логика. Аксиоматические теории / Р. Столл. – Москва : Просвещение, 1968. – 231 с.

21. Столл, Р. Множества. Логика. Аксиоматические теории / Р. Столл. – Москва : Просвещение, 1968. – 231 с.

22. Фаддеев, Д. К. Лекции по алгебре / Д. К. Фаддеев. – Москва : Наука, 1984. – 416 с.

23. Фаддеев, Д. К. Сборник задач по высшей алгебре / Д. К. Фаддеев, И. С. Соминский. – Москва : Наука, 1977. – 288 с.