Л.А. Одинцова
Л.М. Бронникова

ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

© Алтайский государственный педагогический университет, 2021

Об издании

Основной титульный экран

Дополнительный титульный экран непериодического издания – 1

Дополнительный титульный экран непериодического издания – 2

© Алтайский государственный педагогический университет, 2021

МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Алтайский государственный педагогический университет»
(ФГБОУ ВО «АлтГПУ»)

Л.А. Одинцова, Л.М. Бронникова

ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

Учебно-методическое пособие

Барнаул
ФГБОУ ВО «АлтГПУ»
2021

Об издании - 1, 2, 3.

© Алтайский государственный педагогический университет, 2021

УДК 517.38(075)
ББК 22.161.12я73
О-425

Одинцова, Л.А.

Определенный интеграл и его приложения : учебно-методическое пособие / Л.А. Одинцова, Л.М. Бронникова. – Барнаул : АлтГПУ, 2021. – Текст (визуальный) : электронный. – Систем. требования: PC не ниже класса Intel Celeron 2 ГГц ; 512 Mb RAM ; Windows XP/Vista/7/8/10 ; Adobe Acrobat Reader ; SVGA монитор с разрешением 1024x768 ; мышь.

Рецензенты:

Пышнограй Г.В., доктор физико-математических наук, профессор (Алтайский государственный технический университет им. И.И. Ползунова);

Гончарова М.А., кандидат педагогических наук, доцент (Алтайский институт развития образования им. А.М. Топорова)

В учебно-методическом пособии рассматривается один из основных разделов математического анализа «Определенный интеграл». Пособие содержит лекционный курс, материалы для практических занятий, контрольно-оценочные средства, методические рекомендации для организации самообразовательной деятельности студентов по усвоению теоретических знаний и способов деятельности по разделу «Определенный интеграл». В пособии подробно описаны приложения определенного интеграла в геометрии, физике, механике, биологии, медицине, экономике.

Учебно-методическое пособие предназначено для студентов вузов, может оказаться полезным преподавателям и обучающимся других образовательных организаций.

Рекомендовано к изданию редакционно-издательским советом АлтГПУ 25.11.2021 г.

Текст (визуальный) : электронный

Системные требования:

PC не ниже класса Intel Celeron 2 ГГц ; 512 Mb RAM ; Windows XP/Vista/7/8/10 ; Adobe Acrobat Reader ; SVGA монитор с разрешением 1024x768 ; мышь.

Об издании - 1, 2, 3.

© Алтайский государственный педагогический университет, 2021

Электронное издание создано при использовании программного обеспечения Sunrav BookOffice.

Объём издания – 3 985 КБ.

Дата подписания к использованию: 17.12.2021

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Алтайский государственный педагогический университет» (ФГБОУ ВО «АлтГПУ»)

ул. Молодежная, 55, г. Барнаул, 656031

Тел. (385-2) 36-82-71, факс (385-2) 24-18-72

e-mail: rector@altspu.ru, http://www.altspu.ru

Об издании - 1, 2, 3.

© Алтайский государственный педагогический университет, 2021

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

1. ЛЕКЦИОННЫЙ КУРС

Историческая справка

Глава 1. Определенный интеграл

1.1. Задачи, приводящие к определенному интегралу

1.1.1. Задача о площади криволинейной трапеции

1.1.2. Задача о работе переменной силы

1.2. Понятие определенного интеграла

1.3. Условия существования определенного интеграла

1.3.1. Суммы Дарбу. Их свойства

1.3.2. Верхний и нижний интегралы Дарбу

1.3.3. Необходимые и достаточные условия интегрируемости

1.4. Равномерная непрерывность функции. Теорема Кантора

1.5. Классы интегрируемых функций

1.6. Свойства определенного интеграла

1.6.1. Свойства, выражаемые равенствами

1.6.2. Свойства, выражаемые неравенствами

1.7. Определенный интеграл с переменным верхним пределом

1.8. Основная формула интегрального исчисления

1.9. Интегрирование подстановкой в определенном интеграле

1.10. Интегрирование по частям в определенном интеграле

Задания для самоконтроля

Глава 2. Приложения определенного интеграла в геометрии

2.1. Вычисление площадей плоских фигур

2.1.1. Площадь криволинейной трапеции

© Алтайский государственный педагогический университет, 2021

2.1.2. Вычисление площадей плоских фигур в декартовых координатах

2.1.3. Площадь криволинейной трапеции, ограниченной кривой, заданной параметрически

2.1.4. Площадь криволинейного сектора в полярных координатах

2.2. Длина дуги плоской кривой

2.2.1. Определение длины дуги плоской кривой

2.2.2. Вычисление длины дуги

2.2.3. Дифференциал дуги

2.3. Вычисление объема тела вращения

2.4. Площадь поверхности вращения

2.4.1. Определение площади поверхности вращения

2.4.2. Вычисление площади поверхности вращения

Задания для самоконтроля

Глава 3. Приложения определенного интеграла в физике и механике

3.1. Схемы применения определенного интеграла

3.1.1. Схема элементов

3.1.2. Схема дифференциалов

3.2. Работа переменной силы

3.3. Масса неоднородного стержня

3.4. Давление жидкости на вертикальную пластину

3.5. Кинетическая энергия тела

3.6. Количество электричества

3.7. Статический момент и центр масс

3.7.1. Статический момент материальной точки

3.7.2. Статические моменты системы материальных точек

3.7.3. Центр масс системы материальных точек

3.7.4. Центр масс плоской кривой

3.7.5. Статический момент и центр масс плоской фигуры

3.8. Момент инерции

© Алтайский государственный педагогический университет, 2021

3.8.1. Момент инерции дуги материальной кривой

3.8.2. Момент инерции плоской материальной фигуры

Задания для самоконтроля

Глава 4. Приложения определенного интеграла в биологии, медицине и экономике

4.1. Приложения определенного интеграла в биологии

4.1.1. Численность популяции

4.1.2. Биомасса популяции

4.1.3. Средняя длина пролета

4.2. Интегральное исчисление в медицине

4.3. Интегральное исчисление в экономике и финансах

4.3.1. Экономический смысл определенного интеграла

4.3.2. Нахождение объема выпущенной продукции по известной функции производительности труда

4.3.3. Нахождение экономических функций по известным предельным значениям

4.3.4. Производственная функция Кобба – Дугласа

4.3.5. Среднее время изготовления изделия

4.3.6. Количество денег, поступающих в банк за определенный промежуток времени

4.3.7. Дисконтированная стоимость денежного потока

Задания для самоконтроля

2. ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАНЯТИЯ

Занятие № 1. Определенный интеграл. Понятие. Свойства. Вычисление

Занятие № 2. Определенный интеграл. Вычисление определенного интеграла с использованием формулы Ньютона – Лейбница, методов подстановки и по частям

Занятие № 3. Определенный интеграл. Вычисление с помощью определенного интеграла площадей плоских фигур и объемов тел вращения

Занятие № 4. Определенный интеграл. Вычисление с помощью определенного интеграла: длин дуг плоских кривых, площадей поверхностей пространственных фигур

Занятие № 5. Несобственные интегралы

3. КОНТРОЛЬНО-ОЦЕНОЧНЫЕ СРЕДСТВА

3.1. Творческое задание по теме «Определенный интеграл и его приложения»

© Алтайский государственный педагогический университет, 2021

3.2. Средства оценивания выполненного творческого задания по теме «Определенный интеграл и его приложения».

3.3. Портфолио

3.4. Самостоятельная работа

3.5. Вопросы к зачету

4. МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ДЛЯ ОРГАНИЗАЦИИ САМООБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ СТУДЕНТОВ ПО УСВОЕНИЮ ТЕОРЕТИЧЕСКИХ ЗНАНИЙ И СПОСОБОВ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ПО РАЗДЕЛУ «ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ»

4.1. Методические рекомендации преподавателю для организации самообразовательной деятельности студента по усвоению теоретических знаний и способов деятельности по разделу «Определенный интеграл»

4.2. Рекомендации студентам по организации самообразовательной деятельности

4.3. Рекомендации обучающимся с ограниченными возможностями здоровья (ОВЗ)

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

© Алтайский государственный педагогический университет, 2021

ВВЕДЕНИЕ

Настоящее учебно-методическое пособие предназначено для организации самообразовательной деятельности студентов – будущих учителей математики по усвоению знаний и способов деятельности, формируемых в разделе математического анализа «Определенный интеграл» в условиях дистанционного обучения.

Данный раздел выполняет важную роль в структуре математического анализа и профессиональной подготовке будущего учителя математики, поскольку раскрывает источники возникновения и развития математической теории. Он иллюстрирует, каким образом методы, возникшие в недрах развивающейся теории, становятся мощным средством решения не только математических задач, но и проблем других областей знания и человеческой практики. Таким образом, при изучении определенного интеграла осуществляется развитие личности будущего педагога, формирование его мировоззрения.

Следовательно, изучение этого курса должно быть организовано так, чтобы студент был заинтересован и активен в глубоком и осознанном усвоении теоретических знаний, методов и средств интегрального исчисления. Поэтому в качестве основных принципов построения содержания и отбора методов, форм и средств его изложения выбраны следующие положения:

• разумное сочетание научности и доступности изложения фактов, осуществления доказательств математических утверждений. Построение теории определенного интеграла должно осуществляться на основе использования методов и средств логичной и строгой аргументации утверждений, обоснованности каждого этапа доказательства, что должно повлечь формирование у студентов потребности в достаточно убедительной аргументации утверждений. Четкое изложение теории должно сопровождаться приведением достаточного числа конкретизирующих примеров;

• гармонизация теоретической и практической составляющих математической подготовки будущего учителя математики. Любое теоретическое положение сопровождается конкретными примерами. Решение любой практической задачи – четкой аргументацией решения;

• взаимосвязь изучения определенного интеграла с другими разделами математического анализа, с другими математическими дисциплинами, физикой, астрономией и другими областями научного знания и практической деятельности;

© Алтайский государственный педагогический университет, 2021

• управляемость процессом усвоения учебного материала. Результаты любой самообразовательной деятельности должны проверяться, анализироваться, корректироваться.

Исходя из установленного назначения дисциплины, выбранных принципов формирования содержания и способов его изложения, определена следующая её структура:

1. Лекционный курс.

2. Практические занятия.

3. Контрольно-оценочные средства.

4. Методические рекомендации для организации самообразовательной деятельности студентов по усвоению теоретических знаний и способов деятельности по разделу «Определенный интеграл».

Принцип разумного сочетания научности и доступности изложения учебного материала, реализуемый при построении лекционного курса, требует в процессе доказательства теоремы концентрировать внимание студентов на поиске аргументации некоторого положения, после завершения доказательства структурировать процесс доказательства, выделить его этапы и аргументацию на каждом этапе. На практических занятиях и при выполнении контрольно-оценочных заданий он сводится к требованию выделения основных этапов решения задачи, перечислению известных утверждений, служащих аргументами на каждом этапе, и обоснованию возможности использования аргумента в каждом конкретном случае.

Принцип гармонизации теоретической и практической составляющих математической подготовки будущего учителя математики работает при построении практических занятий и контрольно-оценочных средств, при организации повторения основных теоретических положений, служащих базой для решения задач и аргументации в процессе решения.

В контрольно-оценочных средствах задания формируются таким образом, чтобы, во-первых, обучающиеся аргументировали свои утверждения и поясняли своими словами, как они понимают то или иное утверждение (работают принципы гармонизации теоретической и практической составляющих математической подготовки и разумного сочетания научности и доступности); во-вторых, предлагаются задачи из физики, астрономии практического характера, где реализуется принцип межпредметных связей.

© Алтайский государственный педагогический университет, 2021

Принцип управляемости самообразовательной деятельности реализуется в процессе использования учебно-методического пособия путем своевременного доведения до обучающихся содержания контрольных заданий, ознакомления с критериями и показателями их оценивания, проверки, анализа результатов, организации коррекционной работы.

Все вышеизложенное позволяет выделить основные функции данного учебно-методического пособия при организации дистанционного обучения:

- организация самообразовательной деятельности студентов и создание педагогических условий для её развития в предметном поле «математика»;
- стимулирование и направление самообразовательной деятельности на усвоение и развитие математических знаний и способов деятельности средствами изучаемого раздела учебной дисциплины;
- формирование познания будущими учителями источников возникновения математики, развития ее теорий, методов и становления как средства развития различных областей научного знания и человеческой практики;
- формирование научного мировоззрения обучающихся.

© Алтайский государственный педагогический университет, 2021

1. ЛЕКЦИОННЫЙ КУРС. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ДЛЯ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

Историческая справка

Глава 1. Определенный интеграл

1.1. Задачи, приводящие к определенному интегралу

1.1.1. Задача о площади криволинейной трапеции

1.1.2. Задача о работе переменной силы

1.2. Понятие определенного интеграла

1.3. Условия существования определенного интеграла

1.3.1. Суммы Дарбу. Их свойства

1.3.2. Верхний и нижний интегралы Дарбу

1.3.3. Необходимые и достаточные условия интегрируемости

1.4. Равномерная непрерывность функции. Теорема Кантора

1.5. Классы интегрируемых функций

1.6. Свойства определенного интеграла

1.6.1. Свойства, выражаемые равенствами

1.6.2. Свойства, выражаемые неравенствами

1.7. Определенный интеграл с переменным верхним пределом

1.8. Основная формула интегрального исчисления

1.9. Интегрирование подстановкой в определенном интеграле

1.10. Интегрирование по частям в определенном интеграле

Задания для самоконтроля

Глава 2. Приложения определенного интеграла в геометрии

2.1. Вычисление площадей плоских фигур

2.1.1. Площадь криволинейной трапеции

2.1.2. Вычисление площадей плоских фигур в декартовых координатах

2.1.3. Площадь криволинейной трапеции, ограниченной кривой, заданной параметрически

© Алтайский государственный педагогический университет, 2021

2.1.4. Площадь криволинейного сектора в полярных координатах

2.2. Длина дуги плоской кривой

2.2.1. Определение длины дуги плоской кривой

2.2.2. Вычисление длины дуги

2.2.3. Дифференциал дуги

2.3. Вычисление объема тела вращения

2.4. Площадь поверхности вращения

2.4.1. Определение площади поверхности вращения

2.4.2. Вычисление площади поверхности вращения

Задания для самоконтроля

Глава 3. Приложения определенного интеграла в физике и механике

3.1. Схемы применения определенного интеграла

3.1.1. Схема элементов

3.1.2. Схема дифференциалов

3.2. Работа переменной силы

3.3. Масса неоднородного стержня

3.4. Давление жидкости на вертикальную пластину

3.5. Кинетическая энергия тела

3.6. Количество электричества

3.7. Статический момент и центр масс

3.7.1. Статический момент материальной точки

3.7.2. Статические моменты системы материальных точек

3.7.3. Центр масс системы материальных точек

3.7.4. Центр масс плоской кривой

3.7.5. Статический момент и центр масс плоской фигуры

3.8. Момент инерции

3.8.1. Момент инерции дуги материальной кривой

3.8.2. Момент инерции плоской материальной фигуры

© Алтайский государственный педагогический университет, 2021

Задания для самоконтроля

Глава 4. Приложения определенного интеграла в биологии, медицине и экономике

4.1. Приложения определенного интеграла в биологии

4.1.1. Численность популяции

4.1.2. Биомасса популяции

4.1.3. Средняя длина пролета

4.2. Интегральное исчисление в медицине

4.3. Интегральное исчисление в экономике и финансах

4.3.1. Экономический смысл определенного интеграла

4.3.2. Нахождение объема выпущенной продукции по известной функции производительности труда

4.3.3. Нахождение экономических функций по известным предельным значениям

4.3.4. Производственная функция Кобба – Дугласа

4.3.5. Среднее время изготовления изделия

4.3.6. Количество денег, поступающих в банк за определенный промежуток времени

4.3.7. Дисконтированная стоимость денежного потока

Задания для самоконтроля

© Алтайский государственный педагогический университет, 2021

Историческая справка

Интегральное исчисление – это раздел математики, занимающийся изучением интегралов, их свойств и методов вычисления. Вместе с дифференциальным исчислением интегральное исчисление составляет основу математического анализа.

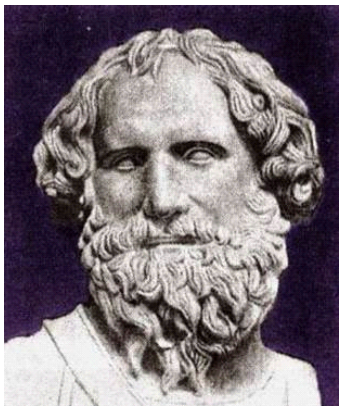
Понятие интеграла и интегральное исчисление возникли из потребности вычислять площади (квадратуру) любых фигур и объёмы (кубатуру) произвольных тел. Предыстория интегрального исчисления восходит к древности.

Интегрирование берет свое начало ещё в Древнем Египте примерно с 1800 г. до н. э., о чем свидетельствует Московский математический папирус (или математический папирус Голенищева).

Первым известным методом для расчёта интегралов является метод для исследования площади или объёма криволинейных фигур – метод исчерпывания Евдокса (Евдокс Книдский (ок. 408 г. до н. э. – ок. 355 г. до н. э.) – древнегреческий математик, механик и астроном), который предложил его примерно в 370 г. до н.э. Суть этого метода заключается в следующем: фигура, площадь или объем которой пытались найти, разбивалась на бесконечное множество частей, для которых площадь или объём уже известны. Проиллюстрируем метод исчерпывания на простом примере. Предположим, что нам надо вычислить объём лимона, который имеет неправильную форму, поэтому применить какую-либо известную формулу объёма нельзя. С помощью взвешивания найти объём также трудно, так как плотность лимона в разных частях его разная. Поступим следующим образом. Разрежем лимон на тонкие дольки. Каждую дольку приближённо можно считать цилиндром, радиус основания которого можно измерить. Объём такого цилиндра вычислить легко по готовой формуле. Сложив объёмы маленьких цилиндров, мы получим приближенное значение объёма всего лимона. Приближение будет тем точнее, чем на более тонкие части мы сможем разрезать лимон.

Через две тысячи лет метод исчерпывания был преобразован в метод интегрирования, с помощью которого удалось объединить самые разные задачи – вычисление площади, объёма, массы, работы, давления, электрического заряда, светового потока и многие, многие другие.

© Алтайский государственный педагогический университет, 2021



Дальнейшее развитие метод исчерпывания получил в работах древнегреческого математика, физика и инженера Архимеда (287 г. до н. э. – 212 г. до н. э.) для расчёта площадей парабол и приближенного расчёта площади круга. Аналогичные методы были разработаны в Китае в третьем веке нашей эры китайским математиком Лю Хуэйем (ок. 220 г. – ок. 280 г.), который с их помощью находил площадь круга. Для нахождения объёма шара этот метод использовал китайский математик, астроном, механик, писатель Цзу Чунчжи (429–500 гг.) вместе со своим сыном, также математиком и астрономом, правителем области и государственным казначеем, Цзу Гэном.

Далее большой шаг вперед в развитии интегрального исчисления был предпринят в XI веке в Ираке арабским ученым-универсалом, математиком, механиком, физиком и астрономом Абу Али аль-Хасан ибн аль-Хасан ибн аль-Хайсам аль-Басри (965–1039 гг.) (или Ибн ал-Хайсамом, в Европе известном как Alhazen), который в своей работе «Об измерении параболического тела» приводит формулы для суммы последовательных квадратов, кубов и четвёртых степеней и ряд других формул для сумм рядов. С помощью этих формул он проводит вычисление, равносильное вычислению определённого интеграла. Используя математическую индукцию, он смог обобщить свои результаты для интегралов от многочленов до четвёртой степени. Таким образом, он был близок к поиску общей формулы для интегралов от полиномов не выше четвёртой степени.

Следующий значительный толчок в исчислении интегралов состоялся лишь в XVI веке в работах итальянского математика Бонавентура Франческо Кавальери (1598–1647 гг.), в которых описывался предложенный им метод неделимых, а также в работах французского математика Пьера де Ферма (1601–1665 гг.). Этими учеными были заложены основы современного интегрального исчисления. Дальнейшее развитие связано с деятельностью английского математика, физика и богослова Исаака Барроу (1630–1677 гг.) и итальянского математика и физика, ученика Галилея Эванджелиста Торричелли (1608–1647 гг.), которые представили первые намеки на связь между интегрированием и дифференцированием.

В XVII веке были сделаны многие открытия, относящиеся к интегральному исчислению. Так, Пьер Ферма уже в 1629 году решил задачу квадратуры любой кривой и на этой основе решил ряд задач на нахождение центров тяжести. Иоганн Кеплер при выводе своих знаменитых законов движения планет фактически опирался на идею приближенного интегрирования. Исаак Барроу (1603–1677 гг.), учитель Ньютона, близко подошел к пониманию связи интегрирования и дифференцирования.

© Алтайский государственный педагогический университет, 2021

Большое значение имели работы по представлению функции в виде степенных рядов. Кроме того, работы Кавальери, Декарта, Валлиса, Гюйгенса, Паскаля и других подготовили все для построения дифференциального и интегрального исчислений, которые появились в работах Ньютона и Лейбница и стали могучим средством решения новых задач. О том, что они опирались на труды предыдущих поколений математиков, Ньютон сказал: «Я сделал так много потому, что стоял на плечах гигантов».

Очень много написано по вопросу о приоритете открытия интегрального и дифференциального исчисления. Установлено, что Ньютон и Лейбниц открыли свои методы независимо друг от друга. Ньютон раньше открыл свои методы анализа (1665–1666 гг.), а Лейбниц позже (1673–1676 гг.), но Лейбниц первым выступил в печати (Лейбниц в 1684–1686 гг., Ньютон в 1704–1736 гг.).

Гениальный английский ученый, основоположник современной механики, создатель математики непрерывных процессов Исаак Ньютон (1643–1727 гг.) в 1665–1666 гг. открыл свой общий метод анализа, который назвал «теорией флюксий». Первое систематическое изложение этой теории дано в рукописи «Следующие предложения достаточны, чтобы решать задачи с помощью движения» (1666 г.). Данный Ньютоном метод флюксий имел впоследствии огромное значение для всего анализа. К 1665–1666 гг. относится открытие Ньютоном взаимно обратного характера операций дифференцирования и интегрирования.

В понятиях и терминологии метода флюксий с полной отчётливостью отразилась глубокая связь математических и механических исследований Ньютона. Понятие непрерывной математической величины Ньютон вводит как абстракцию от различных видов непрерывного механического движения. Линии производятся движением точек, поверхности – движением линий, тела – поверхностей, углы – вращением сторон и т. д. Переменные величины Ньютон назвал флюентами (текущими величинами, от лат. fluo – «теку»). Общим аргументом текущих величин – флюент – является у Ньютона «абсолютное время», к которому отнесены прочие, зависимые переменные. Скорости изменения флюент Ньютон назвал флюксиями, а необходимые для вычисления флюксий бесконечно малые изменения флюент – «моментами» (у Лейбница они назывались дифференциалами). Таким образом, Ньютон положил в основу понятия флюксии (производной) и флюенты (первообразной, или неопределённого интеграла).

Изложение анализа Ньютона имеет механическую основу. Текущие переменные величины изменяются в зависимости от времени – «флюенты». Скорости, с которыми каждая флюента изменяется при движении, – «флюксии».

© Алтайский государственный педагогический университет, 2021

Ньютоном были поставлены в терминах метода флюксий две главные проблемы анализа:

- по данному соотношению между флюентами определить соотношение между флюксиями (задача дифференцирования функций, зависящих от «времени»);

- по данному уравнению, содержащему флюксии, найти соотношение между флюентами (задача интегрирования дифференциального уравнения первого порядка).

Однако его способ не был вполне определенным. Бесконечно малое количество было определено нестрого: в одних случаях им пренебрегали, отбрасывали его, в других случаях на него делили, то есть считали ненулевым. Но в целом разработанная Ньютоном теория флюксий дала начало дифференциальному и интегральному исчислениям в том виде, в котором мы их знаем сегодня.

Однако при всей значимости результатов, полученных математиками XVII столетия, непосредственно интегрального исчисления еще не было. Необходимо было выделить общие идеи, лежащие в основе решения многих частных задач, а также установить связь операций дифференцирования и интегрирования, дающую достаточно точный алгоритм. Предстояло еще научиться находить первообразные многих функций, дать логические основы нового исчисления и т. п. Но главное уже было сделано: дифференциальное и интегральное исчисление начало свое оформление.

Остановимся на имеющихся в истории вариантах символики интегралов. За время становления интегрального исчисления менялось и обозначение интеграла. Английский физик, механик, математик и астроном Исаак Ньютон использовал в некоторых своих работах в качестве символа интегрирования значок квадрата перед обозначением функции или вокруг него, а также вертикальную черту над функцией, но эти обозначения не получили широкого распространения.

Современное обозначение неопределённого интеграла было введено немецким философом, логиком, математиком, механиком, физиком, юристом, историком, дипломатом, изобретателем и языковедом Готфридом Вильгельмом Лейбницем (1646–1716 гг.) в 1675 году. Он образовал символ интеграла из буквы «длинная S» (от первой буквы слова Summa – «сумма», с латинского).

Современное обозначение определённого интеграла, с указанием пределов интегрирования, было впервые предложено французским математиком и физиком Жаном Батистом Жозефом Фурье (1768–1830 гг.) в 1819–1820 годах. Сам термин «интеграл» (от лат. integer – «целый»,

© Алтайский государственный педагогический университет, 2021

то есть «целая, вся» – площадь) предложен швейцарским математиком Якобом Бернулли (1654–1705 гг.) в 1690 году. В ходе переписки Иоганн Бернулли и Готфрид Вильгельм Лейбниц согласились с предложением Якоба Бернулли. Таким образом, в 1696 году появилось и название новой ветви математики – интегральное исчисление (calculus integralis), которое ввел Иоганн Бернулли.

Другие известные термины, относящиеся к интегральному исчислению, появились значительно позднее. Употребляющийся в современной математике термин «первообразная функция» заменил более ранний «примитивная функция», который ввел Лагранж (1797 г.). Латинское слово primitivus переводится как «начальный»: $F(x)$ – начальная (или первоначальная, или первообразная) для функции $f(x)$, которая получается из $F(x)$ дифференцированием.

В современной литературе множество всех первообразных для функции $f(x)$ называется также неопределенным интегралом. Это понятие выделил Лейбниц, который заметил, что все первообразные функции отличаются на произвольную постоянную. А $\int_a^b f(x)dx$ называют определенным интегралом (обозначение ввел Фурье (1768–1830 гг.), но пределы интегрирования указывал уже Эйлер).

В развитии интегрального исчисления также приняли участие русские математики Михаил Васильевич Остроградский (1801–1862 гг.), Виктор Яковлевич Буняковский (1804–1889 гг.), Пафнутий Львович Чебышев (1821–1894 гг.). Принципиальное значение имели, в частности, результаты Чебышева, доказавшего, что существуют интегралы, не выразимые через элементарные функции.

Строгое изложение теории интеграла появилось только в XIX веке, решение этой задачи связано с именами Огюстена Луи Коши, одного из крупнейших математиков, немецкого ученого Бернхарда Римана (1826–1866 гг.), французского математика Жана Гастона Дарбу (1842–1917 гг.).

Ответы на многие вопросы, связанные с существованием площадей и объемов фигур, были получены с созданием Камилем Жорданом (1826–1922 гг.) теории меры.

Различные обобщения понятия интеграла уже в начале XX столетия были предложены французскими математиками Анри Леоном Лебегом (1875–1941 гг.) и Арно Данжуа (1884–1974 гг.), советским математиком Александром Яковлевичем Хинчиным (1894–1959 гг.) и др.

Сегодня ученые стремятся любые физические явления выражать в виде математических формул. Когда в руках есть определенная формула, то в дальнейшем уже можно с ее помощью посчитать все, что необходимо. А интеграл является одним

© Алтайский государственный педагогический университет, 2021

из главных инструментов работы с любыми функциями. К примеру, имея формулу круга, можно посредством интеграла вычислить его площадь. Если есть формула шара, то можно вычислить его объем. Посредством интегрирования можно найти работу, энергию, массу, давление, электрический заряд и прочие важные величины. Интеграл имеет большое прикладное значение в геометрии, физике, экономике и других науках и областях деятельности человека.

© Алтайский государственный педагогический университет, 2021

Глава 1. Определенный интеграл

1.1. Задачи, приводящие к определенному интегралу

1.1.1. Задача о площади криволинейной трапеции

1.1.2. Задача о работе переменной силы

1.2. Понятие определенного интеграла

1.3. Условия существования определенного интеграла

1.3.1. Суммы Дарбу. Их свойства

1.3.2. Верхний и нижний интегралы Дарбу

1.3.3. Необходимые и достаточные условия интегрируемости

1.4. Равномерная непрерывность функции. Теорема Кантора

1.5. Классы интегрируемых функций

1.6. Свойства определенного интеграла

1.6.1. Свойства, выражаемые равенствами

1.6.2. Свойства, выражаемые неравенствами

1.7. Определенный интеграл с переменным верхним пределом

1.8. Основная формула интегрального исчисления

1.9. Интегрирование подстановкой в определенном интеграле

1.10. Интегрирование по частям в определенном интеграле

Задания для самоконтроля

© Алтайский государственный педагогический университет, 2021

1.1. Задачи, приводящие к определенному интегралу

1.1.1. Задача о площади криволинейной трапеции

1.1.2. Задача о работе переменной силы

© Алтайский государственный педагогический университет, 2021

1.1.1. Задача о площади криволинейной трапеции

Пусть имеем плоскую $AabB$ фигуру, ограниченную дугой AB кривой $y = f(x)$, где f – непрерывная неотрицательная функция на отрезке $[a; b]$, осью Ox и прямыми $x = a$ и $x = b$. Такая фигура называется криволинейной трапецией (рис. 1).

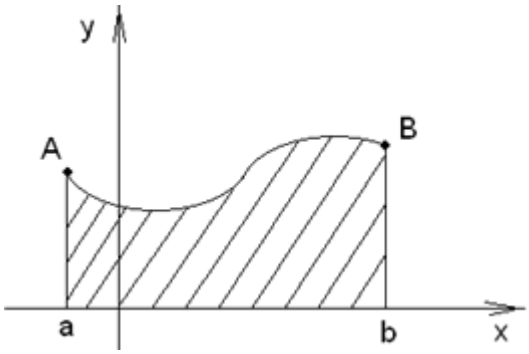


Рис. 1. Криволинейная трапеция

Поставим задачу вычислить площадь криволинейной трапеции. Определение площади плоской фигуры, ограниченной кривыми линиями, дадим несколько позднее. Сейчас перед нами стоят задачи: 1) дать определение площади криволинейной трапеции, согласующееся с наглядными представлениями о площади; 2) найти способ вычисления этой площади.

Разделим основание трапеции произвольным образом на n частей, вставляя между точками a и b ряд других точек. Абсциссы делящих точек обозначим в порядке возрастания $x_1, x_2, \dots, x_{(k-1)}, x_k, \dots, x_{(n-1)}$ (1).

Для однообразия обозначим $a = x_0, b = x_n$.

Тогда $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots <.< x_{(k-1)} < x_k < \cdots < x_{(n-1)} < x_n = b$.

Совокупность точек (1) будем называть разбиением отрезка $[a, b]$, отрезки $[x_{(k-1)}, x_k], (k = \overline{1,n})$ – частичными отрезками разбиения. Обозначим рассмотренное разбиение через T.

Через каждую делящую точку разбиения T проведем прямую, параллельную оси Oy, до пересечения с кривой $y = f(x)$. Криволинейная трапеция разобьется на n полосок (рис. 2).

© Алтайский государственный педагогический университет, 2021

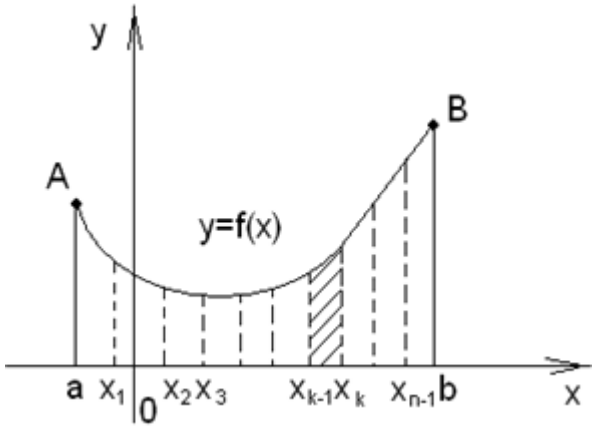


Рис. 2. Разбиение криволинейной трапеции на части

В каждом отрезке $[x_{(k-1)}, x_k]$ выберем произвольно точку $\xi_k (x_{(k-1)} < \xi_k < x_k)$ и проведем через нее прямую, параллельную оси О*y*, до пересечения с кривой $y = f(x)$ в точке M_k (рис. 3).

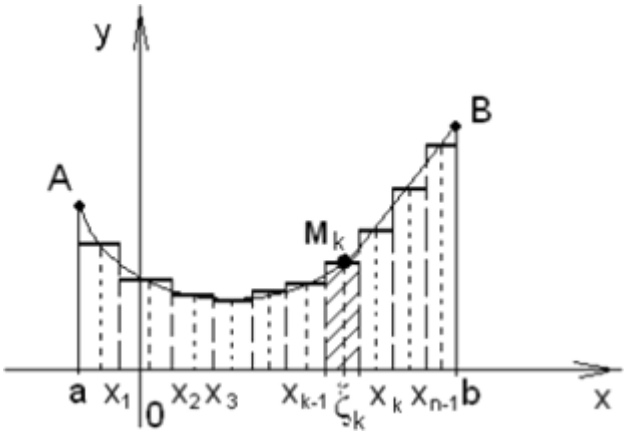


Рис. 3. Ступенчатая фигура, построенная на основании трапеции

Заменим *k*-ю полоску прямоугольником с основанием $[x_{(k-1)}, x_k]$ и $\xi_k M_k$ – высотой. В результате вся криволинейная трапеция заменится ступенчатой фигурой, составленной из прямоугольников. Так как площадь *k*-го прямоугольника равна $\Delta S_k = f(\xi_k)\Delta x_k$, то площадь всей ступенчатой фигуры $S_{ступ.} = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$ (2).

Естественно считать, что $S_{ступ.}$ при достаточно мелком дроблении отрезка [*a, b*] на части является приближенным значением площади криволинейной трапеции $S_{тр.} \approx \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k$.

© Алтайский государственный педагогический университет, 2021

Определение. Если при стремлении $n \to \infty$ таким образом, что длина d наибольшего из частичных отрезков разбиения стремится к нулю, сумма (2) стремится к некоторому пределу S, не зависящему от разбиения T отрезка $[a; b]$ на частичные и выбора точек ξ_k на отрезках $\left[x_{(k-1)}, x_k\right]$, то этот предел называется площадью криволинейной трапеции $aABb$.

$d = max\{\Delta x_k\}$ называется диаметром разбиения T.

Итак, $S_{тр.} = \lim\limits_{d \to 0} \sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\, \Delta x_k$.

© Алтайский государственный педагогический университет, 2021

1.1.2. Задача о работе переменной силы

Пусть некоторое тело движется по оси O*x* под действием силы *F*, направление которой совпадает с направлением оси O*x,* а величина зависит от места нахождения тела на оси O*x*. При таком перемещении сила *F* совершает некоторую работу. Выясним, что будем понимать под работой переменной силы, и найдем способ ее вычисления.

Разобьем отрезок [*a; b*] перемещения тела на частичные *T*:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{(k-1)} < x_k < \cdots < x_{(n-1)} < x_n = b.$$

В каждом из частичных отрезков $[x_{(k-1)}, x_k]$выберем произвольно точку ξ_k. Сила, действующая на тело в точке ξ_k, равна $F(\xi_k)$. Допустим, что на отрезке $[x_{(k-1)}, x_k]$ сила *F* постоянна и равна $F(\xi_k)$. Тогда работа силы *F* на отрезке [*a; b*] равна $\Delta A_k = F(\xi_k)\Delta x_k$, а работа силы *F* на отрезке [*a; b*] будет приближенно равна $A \approx \sum_{k=1}^{n} F(\xi_k)\Delta x_k$.

Поскольку сила *F* в различных точках каждого частичного отрезка $[x_{(k-1)}, x_k]$ различна, а мы допустили, что на каждом отрезке $[x_{(k-1)}, x_k]$ она совпадает с $F(\xi_k)$, то, увеличивая число делящих точек x_k таким образом, что $d = \max\{\Delta x_k\}$ стремится к нулю, работу переменной силы *F* на отрезке по определению полагают $A = \lim_{d\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k$ (если этот предел существует и не зависит от разбиения отрезка [*a; b*] на частичные и выбора точки ξ_k на частичных отрезках).

© Алтайский государственный педагогический университет, 2021

1.2. Понятие определенного интеграла

Пусть на отрезке $[a; b]$ задана функция $y = f(x)$. Разобьем $[a; b]$ на частичные точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{(k-1)} < x_k < \cdots < x_{(n-1)} < x_n = b$.

На каждом частичном отрезке $[x_{(k-1)}, x_k]$ выберем произвольно точку ξ_k, вычислим значение функции $f(\xi_k)$ и составим произведения $f(\xi_k)\Delta x_k, k = \overline{1,n}$.

Все полученные произведения сложим и сумму обозначим через σ: $\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$ (1).

Сумму такого вида называют интегральной суммой, составленной для функции f на отрезке $[a; b]$.

Замечание. Для функции f можно составить на отрезке $[a; b]$ много различных интегральных сумм в зависимости от выбора разбиения отрезка и выбора точек $\xi_k \in [x_{(k-1)}; x_k]$.

Будем неограниченно увеличивать число n делений отрезка $[a; b]$ таким образом, чтобы диаметр разбиения $d \to 0$, и рассмотрим получающееся при этом множество интегральных сумм $\{\sigma\}$.

Определение 1. Число I называется пределом множества интегральных сумм σ при $d \to 0$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что при любом разбиении отрезка $[a; b]$ на частичные, удовлетворяющем условию $d < \delta$, и при любом выборе точек $\xi_k \in [x_{(k-1)}; x_k]$ выполняется неравенство $|\sigma - I| < \varepsilon$.

Тот факт, что число I есть предел сумм σ будем записывать $I = \lim\limits_{d\to 0}\sigma$ или $I = \lim\limits_{d\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$.

Теорема. Если существует $\lim\limits_{d\to 0}\sigma$, то этот предел единственный.

Доказательство:

Допустим, что существует два различных предела интегральной суммы σ: $I_1 = \lim\limits_{d\to 0}\sigma$ и $I_2 = \lim\limits_{d\to 0}\sigma$ $(I_1 \neq I_2)$.

Допустим, $I_1 < I_2$.

Возьмём положительное $\varepsilon = \frac{I_2 - I_1}{2}$.

© Алтайский государственный педагогический университет, 2021

Тогда по определению 1 по заданному ε можно найти такое $\delta > 0$, что для каждого разбиения, удовлетворяющего условию $d < \delta$, при любом выборе ξ_k на частичных отрезках $[x_{(k-1)}, x_k]$ будут выполняться неравенства: $|\sigma - I_1| < \varepsilon$, $|\sigma - I_2| < \varepsilon$. Или $I_1 - \varepsilon < \sigma < I_1 + \varepsilon$ и $I_2 - \varepsilon < \sigma < I_2 + \varepsilon$.

Но из $\frac{I_2 - I_1}{2} = \varepsilon$ следует $I_2 - I_1 = 2\varepsilon$ и $I_1 + \varepsilon = I_2 - \varepsilon$

Следовательно, $\sigma < I_1 + \varepsilon = I_2 - \varepsilon < \sigma$, что невозможно.

Определение 2. Если существует предел I сумм σ при $d \to 0$, то говорят, что функция f интегрируема по Риману на отрезке $[a; b]$, а число I называют определенным интегралом от функции f на отрезке $[a; b]$ и обозначают его символом: $\int_a^b f(x)dx$.

Читается: «интеграл от a до b от эф от икс дэ икс».

Символ $\int$ называется знаком интеграла, f – подынтегральной функцией, $f(x)\,dx$ – подынтегральным выражением, a и b – пределами интегрирования.

Итак, $\int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{d\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k$.

Из самого способа введения определенного интеграла следует, что величина его зависит только от подынтегральной функции f и пределов интегрирования a и b.

Возвращаясь к задаче о площади криволинейной трапеции (пункт 1.1.1.) и задаче о работе переменной силы (пункт 1.1.2.), можем записать:

(1) $S_{кр.тр.} = \int_a^b f(x)dx$, где $y = f(x)$ – функция, график которой ограничивает трапецию сверху.

(2) $A = \int_a^b f(x)dx$, где f – сила, производящая работу.

Замечание 1. Формулы (1), (2) будут иметь смысл, если будет доказана интегрируемость функций f. Поэтому нашей ближайшей задачей является выяснение условий интегрируемости функции на данном отрезке.

Теорема. Если функция интегрируема на отрезке $[a; b]$, то она ограничена на нем.

Доказательство:

© Алтайский государственный педагогический университет, 2021

Допустим, существует $\int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{d\to 0}\sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k$.

Предположим, что f не ограничена на $[a; b]$, допустим, сверху. Тогда f не ограничена сверху хотя бы на одном частичном отрезке $[x_{(k-1)}, x_k]$, так как в противном случае функция была бы ограничена на $[a; b]$.

Если f не ограничена сверху на $[x_{(k-1)}, x_k]$, то каково бы ни было число M, можно выбрать $\xi_k \in [x_{(k-1)}; x_k]$ так, что $f(\xi_k) > \frac{M}{x_k - x_{k-1}}$. Выбрав таким образом ξ_k на каждом из $[x_{(k-1)}, x_k]$, можем для интегральной суммы $\sigma = \sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k$ получить сколь угодно большое значение.

Замечание 2. Ограниченность функции f на $[a; b]$ не является достаточным условием интегрируемости функции. Например, функция $D(x) = \begin{cases} 0, \text{если } x \text{ рациональное число}; \\ 1, \text{если } x \text{ иррациональное число} \end{cases}$ ограничена на любом отрезке $[a; b]$, однако не интегрируема на нем.

Действительно, при любом разбиении отрезка $[a; b]$ на частичные, на каждом $[x_{(k-1)}, x_k]$ будут как рациональные, так и иррациональные точки. Выбрав в качестве ξ_k рациональные точки, получим $\delta = \sum\limits_{k=1}^{n} 0 \cdot \Delta x_k = 0$.

Если в качестве ξ_k выбрать иррациональные точки, $\delta = \sum\limits_{k=1}^{n} 1 \cdot \Delta x_k = b - a$.

Ясно, что $\lim\limits_{d\to 0} \sigma$ не существует. Поясните почему.

Замечание 3. Вводя понятие определенного интеграла на $[a; b]$, мы предполагали, что $a < b$. Распространим понятие интеграла на случай $a \geq b$.

Примем по определению:

1. Если $a > b$, то $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$;
2. $\int_a^a f(x)dx = 0$.

© Алтайский государственный педагогический университет, 2021

1.3. Условия существования определенного интеграла

1.3.1. Суммы Дарбу. Их свойства

1.3.2. Верхний и нижний интегралы Дарбу

1.3.3. Необходимые и достаточные условия интегрируемости

© Алтайский государственный педагогический университет, 2021

1.3.1. Суммы Дарбу. Их свойства

Пусть f – функция, ограниченная на $[a; b]$. Рассмотрим разбиение этого отрезка T: $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{(k-1)} < x_k < \cdots < x_{(n-1)} < x_n = b$.

Функция f будет ограничена на каждом отрезке $[x_{(k-1)}, x_k]$.

Почему? Поясните.

Тогда существуют

1) $s = \sum_{k=1}^{n} m_k \cdot \Delta x_k = 0$, где $m_k = \inf\limits_{[x_{(k-1)};\, x_k]} f(x)$;

2) $S = \sum_{k=1}^{n} M_k \cdot \Delta x_k = 0$, где $M_k = \sup\limits_{[x_{(k-1)};\, x_k]} f(x)$.

Почему? Поясните.

Определение 1. Суммы s и S называются соответственно нижней и верхней суммами Дарбу (рис. 4) функции на отрезке $[a; b]$.

Рис. 4. Г. Дарбу (1842–1917 гг.) – французский математик

Выясним свойства сумм Дарбу:

1. Пусть σ – интегральная сумма, отвечающая разбиению T отрезка $[a; b]$. Тогда при любом выборе промежуточных точек ξ_k справедливо неравенство $s \le \sigma \le S$, где s и S – нижняя и верхняя суммы Дарбу, отвечающие разбиению T.

Доказательство:

© Алтайский государственный педагогический университет, 2021

По определению чисел m_k и M_k (назовите их) заключаем, что для любых $\xi_k \in [x_{(k-1)};\ x_k]$ выполнимо $m_k \le f(\xi_k) \le M_k$.

Умножим эти неравенства на Δx_k и, просуммировав по k от 1 до n, получим:

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k}_{s} \le \underbrace{\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k}_{\sigma} \le \underbrace{\sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k}_{S}.$$

2. Для любого фиксированного разбиения T:

$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{(k-1)} < x_k < \cdots < x_{(n-1)} < x_n = b$ справедливы соотношения $s = \inf \sigma, S = \sup \sigma$, где нижняя и верхняя грани берутся по всевозможным промежуточным точкам.

3. При добавлении новых точек деления отрезка $[a, b]$ нижняя сумма Дарбу не уменьшается, верхняя не увеличивается.

Доказательство: (проведем доказательство для S)

Пусть T – есть некоторое разбиение отрезка $[a; b]$. Добавим к делящим точкам T одну точку $\bar{x}$, получим новое разбиение T'. Допустим, $\bar{x} \in [x_{(k-1)};\ x_k]$.

Тогда в S слагаемое $M_k \Delta x_k$ заменится на сумму $\overline{M_k}(\bar{x} - x_{(k-1)}) + \overline{\overline{M_k}}(x_k - \bar{x})$, где $\overline{M_k} = \sup\limits_{[x_{(k-1)};\ \bar{x}]} f(x)$, $\overline{\overline{M_k}} = \sup\limits_{[\bar{x};\ x_k]} f(x)$.

Утверждаем $\overline{M_k} \le M_k$ и $\overline{\overline{M_k}} \le M_k$.

Поясните почему.

Итак, $\overline{M_k}(\bar{x} - x_{(k-1)}) + \overline{\overline{M_k}}(x_k - \bar{x}) \le M_k(\bar{x} - x_{(k-1)}) + M_k(x_k - \bar{x}) = M_k(x_k - x_{(k-1)})$.

Все остальные слагаемые в S останутся без изменения. Тем самым свойство доказано.

4. Любая нижняя сумма Дарбу не превосходит любой верхней суммы, даже отвечающей другому разбиению отрезка $[a; b]$.

Следствие. Множество нижних сумм Дарбу функции f, отвечающих всевозможным разбиениям отрезка $[a; b]$, ограничено сверху. Множество верхних сумм ограничено снизу.

Доказать самостоятельно.

© Алтайский государственный педагогический университет, 2021

1.3.2. Верхний и нижний интегралы Дарбу

В силу ограниченности сверху множества $\{s\}$ существует $\sup\{s\} = J_*$. В силу ограниченности снизу множества $\{S\}$ существует $\inf\{S\} = J^*$.

Определение 2. $\sup\{s\} = J_*$ называется нижним интегралом Дарбу функции f на отрезке $[a; b]$.

$\inf\{S\} = J^*$ называется верхним интегралом Дарбу функции f на отрезке $[a; b]$.

Теорема 1. Нижний интеграл Дарбу не превосходит верхнего интеграла Дарбу, т. е. $J_* \le J^*$.

Определение 3. Число A называется пределом верхних сумм S при стремлении диаметра d к нулю, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что при условии $d < \delta$ выполнится $|A - S| < \varepsilon$. Записывают $\lim\limits_{d \to 0} S = A$.

Аналогично определяется $\lim\limits_{d \to 0} s = A$.

Сформулируйте определение.

Теорема 2. Верхний интеграл Дарбу J^* является пределом верхних сумм Дарбу при стремлении диаметра $d \to 0$, т. е. $J^* = \lim\limits_{d \to 0} S$. Аналогично $J_* = \lim\limits_{d \to 0} s$.

© Алтайский государственный педагогический университет, 2021

1.3.3. Необходимые и достаточные условия интегрируемости

Теорема 3. Для того чтобы ограниченная на отрезке $[a; b]$ функция f была интегрируема на нем, необходимо и достаточно, чтобы $J_* = J^*$.

Теорема 4. Для того чтобы ограниченная на отрезке $[a; b]$ функция f была интегрируема на нем, необходимо и достаточно, чтобы $\lim\limits_{d\to 0}(S-s)=0$.

Доказательство:

1. Необходимость.

Пусть f интегрируема на $[a; b]$, тогда:

$$\left.\begin{array}{l} \textit{Существует}\ \lim\limits_{d\to 0} s = J_* \\ \textit{Существует}\ \lim\limits_{d\to 0} S = J^* \end{array}\right\} \text{и } J_* = J^*.$$

Почему?

В силу теоремы 3. Значит, $\lim\limits_{d\to 0}(S-s)=J^*-J_*=0$.

2. Достаточность. Пусть $\lim\limits_{d\to 0}(S-s)=0$.

Это означает …? (Запишите символически на «языке «$\varepsilon-\delta$»».)

Тогда, поскольку $s \le J_* \le J^* \le S$, то $J^*-J_*<\varepsilon$, т. е. $J_* = J^*$, что означает интегрируемость функции f.

© Алтайский государственный педагогический университет, 2021

1.4. Равномерная непрерывность функции. Теорема Кантора

Если функция f непрерывна в некотором промежутке I (конечном или бесконечном, замкнутом или нет) и непрерывна в точке $x_0 \in I$, то $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, или на «языке $\varepsilon - \delta$»: $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \epsilon I)\left(|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon\right)$ (*).

Пусть f непрерывна на I.

Это значит, f непрерывна в каждой точке $x \in I$. Тогда по заданному $\varepsilon > 0$ для каждой точки $x_0 \in I$ найдется $\delta > 0$, соответствующее ему в указанном смысле. При изменении x_0 в пределах I, даже если ε неизменно, число δ будет меняться, вообще говоря, согласно условиям (*).

Приведенный ниже рисунок 5 иллюстрирует данное утверждение.

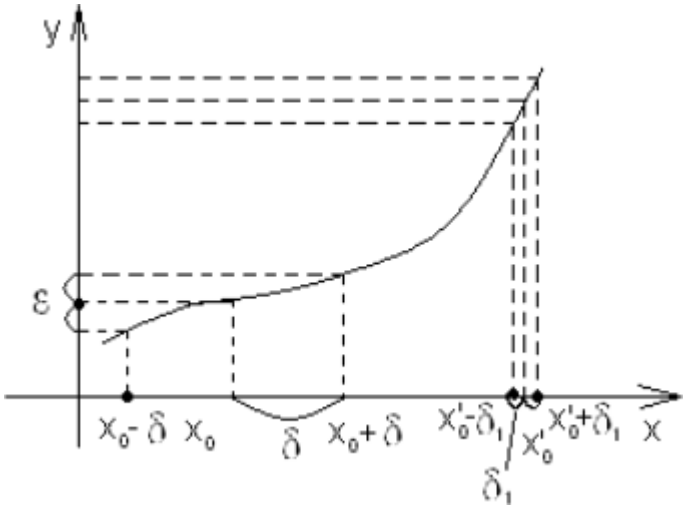


Рис. 5. Геометрическая иллюстрация утверждения (*)

Если бы речь шла о конечном числе точек x_0 (при неизменном ε), то из конечного числа соответствующих δ можно было бы выбрать наименьшее, которое годилось бы для всех x_0 одновременно.

Но по отношению к бесконечному множеству точек $x_0 \in I$ так рассуждать нельзя: при заданном ε им соответствует бесконечное множество чисел δ, среди которых могут быть и бесконечно малые. Выбор единого δ для всех точек из I становится затруднительным.

Встает вопрос: существуют ли функции, непрерывные на промежутке I, такие, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, которое годится для всех x_0?

© Алтайский государственный педагогический университет, 2021

Определение. Функция *f* называется равномерно непрерывной на промежутке *I*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что выполнение неравенства $|x - x_0| < \delta$ влечет за собой выполнение неравенства $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, где бы в пределах промежутка *I* не лежали точки *x* и x_0.

В этом случае число δ оказывается зависящим только от ε: δ годится для всех $x_0 \in I$ одновременно.

Равномерная непрерывность функции *f* означает, что во всех частях промежутка достаточна одна и та же близость двух значений аргумента, чтобы добиться заданной степени близости соответствующих значений функции.

Теорема Кантора. Если функция *f* непрерывна на отрезке [*a; b*], то она равномерно непрерывна на нем.

Доказательство:

Доказательство проведем методом от противного. Пусть *f* непрерывна на [*a; b*], но не является равномерно непрерывной.

Что означает последнее?

Это означает, что существует $\varepsilon > 0$ такое, что для любого $\delta > 0$ найдутся $x, x^{/} \in I$ такие, что $|x - x^{/}| < \delta$ и $|f(x) - f(x^{/})| \geq \varepsilon$.

Рассмотрим последовательность (x_n).

Для каждого δ_n найдутся $x_n, x_n^{/} \in [a, b]$ такие, что $|x_n - x_n^{/}| < \delta_n$ и $|f(x_n) - f(x_n^{/})| \geq \varepsilon$.

По теореме Больцано – Вейерштрасса из ограниченной последовательности (x_n) можно выделить сходящуюся подпоследовательность к некоторой точке $x_0 \in [a; b]$.

Для того чтобы не усложнять обозначений, будем считать, что сама последовательность $(x_n) \to x_0$.

Так как $(x_n - x_n^{/}) \to 0$ (так как $|x_n - x_n^{/}| < \delta_n$ и $(\delta_n) \to 0$), то $(x_n) \to x_0$ и $(x_n^{/}) \to x_0$.

Тогда в силу непрерывности *f*: $((f(x_n)) \to f(x_0)$ и $(f(x_n^{/})) \to f(x_0))$.

© Алтайский государственный педагогический университет, 2021

Следовательно, $\left(f(x_n) - f\left(x_n^{/}\right)\right) \to 0$, что противоречит тому, что $\left|f(x_n) - f\left(x_n^{/}\right)\right| \geq \varepsilon$

.

Следствие. Если функция f непрерывна на отрезке $[a; b]$, то по заданному $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что если отрезок разбить на частичные отрезки с длинами, меньшими δ, то в каждом из них колебание функции f будет меньше ε.

Доказательство:

Зададим $\varepsilon > 0$, в качестве δ возьмем число, о котором говорится в определении равномерной непрерывности. Тогда в частичном промежутке с длиной, меньшей δ, разность между двумя любыми значениями функции в точках, принадлежащих такому частичному отрезку, будет по абсолютной величине меньше ε. В частности, это справедливо и для наибольшего и наименьшего значений функции в указанном частичном промежутке.

© Алтайский государственный педагогический университет, 2021

1.5. Классы интегрируемых функций

Теорема 1. Если функция *f* непрерывна на отрезке $[a;b]$, то она интегрируема на нем.

Доказательство:

В силу непрерывности *f* на $[a;b]$, она равномерно непрерывна на $[a;b]$.

(На основании теоремы Кантора.)

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что для любых $x_1, x_2 \in [a, b]$ из выполнения неравенства $|x_1 - x_2| < \delta$ вытекает $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.

В силу следствия из теоремы Кантора, если $[a;b]$ разбить на части с длинами, меньшими δ, колебание функции на каждом частичном отрезке будет меньше ε, то есть $M_i - m_i < \varepsilon$. Тогда $\boldsymbol{S - s = \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k - \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k =}$

$$= \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k)\Delta x_k < \sum_{k=1}^{n} \varepsilon \Delta x_k = \varepsilon \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = \varepsilon(b-a).$$

Теорема 2. Если ограниченная на отрезке $[a;b]$ функция имеет на нем конечное число точек разрыва, то она интегрируема на нем.

Теорема 3. Монотонная ограниченная функция на отрезке $[a;b]$ интегрируема на нем.

© Алтайский государственный педагогический университет, 2021

1.6. Свойства определенного интеграла

1.6.1. Свойства, выражаемые равенствами

1.6.2. Свойства, выражаемые неравенствами

© Алтайский государственный педагогический университет, 2021

1.6.1. Свойства, выражаемые равенствами

1. Пусть функция *f* интегрируема в наибольшем из отрезков $[a;b]$, $[a;c]$ и $[c;b]$. Тогда она интегрируема и в двух других, и имеет место равенство $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ (1), каково бы ни было взаимное положение точек *a*, *b* и *c*.

Доказательство:

Пусть $a < c < b$ и функция *f* интегрируема на $[a;b]$.

1) Докажем интегрируемость *f* на отрезках $[a;c]$ и $[c;b]$. Рассмотрим произвольное разбиение *T* отрезка $[a;b]$ такое, чтобы точка *c* была одной из делящих точек, тогда $\sum_a^b \omega_k \Delta x_k = \sum_a^c \omega_k \Delta x_k + \sum_c^b \omega_k \Delta x_k$, где $\omega_k = M_k - m_k$ – колебание функции *f* на частичном отрезке $[x_{k-1}, x_k]$.

Ввиду положительности всех слагаемых, из стремления к нулю суммы в левой части равенства вытекает стремление к нулю каждого слагаемого в правой части равенства.

Следовательно, *f* интегрируема на $[a;c]$ и $[c;b]$.

2) Докажем справедливость равенства (1).

Интегральная сумма для функции *f* на $[a;b]$:

$$\sum_a^b f(\xi_k)\Delta x_k = \sum_a^c f(\xi_k)\Delta x_k + \sum_c^b f(\xi_k)\Delta x_k.$$

В правой части стоят интегральные суммы для функции *f* соответственно на отрезках $[a;c]$ и $[c;b]$.

В силу интегрируемости *f* на $[a;c]$ и $[c;b]$, пределы этих сумм при $d \to 0$ существуют и равны соответственно $\int_a^c f(x)dx$ и $\int_c^b f(x)dx$.

Равенство (1) доказано.

3) Другие случаи расположения точек *a*, *b* и *c* сводятся к данному.

Например, $\int_a^c = \int_a^b + \int_b^c \Rightarrow \int_a^c = \int_a^b - \int_c^b = \int_a^b + \int_c^a$.

2. Если функция *f* интегрируема на $[a;b]$, то функция *kf* интегрируема на $[a;b]$ и $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$.

© Алтайский государственный педагогический университет, 2021

Доказать самостоятельно.

3. Если функции f и g интегрируемы на отрезке $[a;b]$, то также интегрируема $f \pm g$ на $[a;b]$ и $\int_a^b (f \pm g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$.

© Алтайский государственный педагогический университет, 2021

1.6.2. Свойства, выражаемые неравенствами

4. Если функция f интегрируема на отрезке $[a;b]$, $(a < b)$, неотрицательна на нем, то $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.

Доказательство:

Составим интегральную сумму для f на $[a;b]$.

$\sigma = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$.

Переходя к пределу, получим $\lim\limits_{d\to 0} \sigma \geq 0$.

5. Если функции f и g интегрируемы на отрезке $[a;b]$, $(a < b)$ и в любой точке отрезка $[a;b]$ $f(x) \leq g(x)$, то $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$.

Доказать самостоятельно. **Указание.** Применить свойство 4.

6. Если функция f интегрируема на отрезке $[a;b]$, $(a < b)$, то и функция $|f|$ интегрируема на $[a;b]$ и справедливо неравенство $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$.

7. Если f интегрируема на отрезке $[a;b]$, $(a < b)$ и во всех точках $[a;b]$ имеют место неравенства $m \leq f(x) \leq M$, то $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$

Доказательство:

Пусть f интегрируема на $[a;b]$ и при любом $x \in [a;b]$ $m \leq f(x) \leq M$.

Тогда для любой точки $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ $m \leq f(\xi_k) \leq M$.

Умножим каждую часть этого двойного неравенства на Δx_k.

«Просуммируем» полученные неравенства:

$\sum_{k=1}^{n} m\Delta x_k \leq \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k \leq \sum_{k=1}^{n} M\Delta x_k$.

В средней части неравенства стоит интегральная сумма для f на $[a;b]$:

$$m\sum_{k=1}^{n}\Delta x_k \leq \sigma \leq M\sum_{k=1}^{n}\Delta x_k$$

© Алтайский государственный педагогический университет, 2021

Откуда $m(b-a) \leq \sigma \leq M(b-a)$.

Завершите доказательство!

8. Если функция f интегрируема на отрезке $[a, b]$ $\begin{pmatrix} a > b \\ a < b \end{pmatrix}$ и в любой точке $x\epsilon[a, b]$ $m \leq f(x) \leq M$, то $x\epsilon[a, b]$ $m \leq f(x) \leq M$, где $m \leq \mu \leq M$.

Доказательство:

Пусть $a < b$, тогда $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$.

Почему?

Разделив каждую часть неравенства на $(b - a) > 0$, получим $m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq M$.

Обозначим $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = \mu$.

Ясно $m \leq \mu \leq M$.

Откуда $\int_a^b f(x)dx = \mu(b-a)$.

Свойство 8 называют теоремой о среднем.

© Алтайский государственный педагогический университет, 2021

1.7. Определенный интеграл с переменным верхним пределом

Если функция *f* интегрируема на отрезке $[a;b]$, то она интегрируема на любом отрезке $[a;x]$, где $x \in [a;b]$. Каждому $x \in [a;b]$ поставим в соответствие значение $\int_a^x f(t)dt$.

Это соответствие определяет функцию $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$.

Почему? Поясните.

Функция $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$ обладает следующими свойствами:

Свойство 1. Если *f* интегрируема на $[a;b]$, то функция $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$ непрерывна.

Доказательство:

Так как функция f интегрируема на $[a;b]$ и $x \in [a;b]$, то интеграл $\int_a^x f(t)dt$ существует. Пусть $x \in [a;b]$, ему соответствует значение функции $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$.

Дадим аргументу x приращение Δx. Аргументу $x + \Delta x$ будет соответствовать $\Phi(x + \Delta x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt$

Найдем приращение $\Delta\Phi$ функции Φ: $\Delta\Phi = \Phi(x + \Delta x) - \Phi(x) = ?$

$$\Delta\Phi = \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt = \int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt =$$

$$= \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt = \mu(x + \Delta x - x) = \mu\Delta x, \text{где } \bar{m} < \mu < \bar{M}$$

($\bar{m}, \bar{M}$ – есть нижняя и верхняя грани функции *f* на отрезке $[x,\ x + \Delta x]$).

Какие свойства интеграла использованы?

Что осталось сделать для завершения доказательства?

Найдем $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta\Phi = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \mu\Delta x = 0.$

Откуда вытекает, что функция Φ непрерывна в точке *x*. **На основании чего сделано такое замечание?**

© Алтайский государственный педагогический университет, 2021

В силу произвольности выбора точки $x \in [a;b]$ заключаем, что Φ непрерывна на $[a;b]$.

Задание. Изучить доказательство. Выделить основные этапы. Аргументировать каждый этап.

Свойство 2. Если функция f непрерывна в точке $x \in [a;b]$, то в этой точке существует $\Phi'(x) = f(x)$.

Доказательство:

Дадим аргументу x приращение Δx и найдем соответствующее приращение функции $\Phi(x+\Delta x) - \Phi(x)$. Оно равно

$$\Phi(x+\Delta x) - \Phi(x) = \mu\Delta x, \text{где } \bar{m} < \mu < \bar{M} \left(\bar{m} = \inf_{x\in[x;\,x+\Delta x]} \{f(x)\}, \quad \bar{M} = \sup_{x\in[x;\,x+\Delta x]} \{f(x)\} \right).$$

Тогда $\dfrac{\Phi(x+\Delta x) - \Phi(x)}{\Delta x} = \dfrac{\mu\Delta x}{\Delta x} = \mu.$

В силу непрерывности функции f в точке x для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что при любом $t\epsilon[x,\ x+\Delta x]$ и $|\Delta x| < \delta$ вытекает $|f(x) - f(t)| < \varepsilon$.

Последнее неравенство равносильно неравенству $f(x) - \varepsilon < f(t) < f(x) + \varepsilon$.

Значит, $f(x) - \varepsilon < \bar{m} < \mu < \bar{M} < f(x) + \varepsilon$.

Откуда $f(x) - \varepsilon < \mu < f(x) + \varepsilon$.

Таким образом, $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \mu = f(x)$.

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Phi(x+\Delta x) - \Phi(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \mu = f(x).$$

Итак, если подынтегральная функция непрерывна в точке $x \in [a;b]$, то производная от определенного интеграла с переменным верхним пределом равна подынтегральной функции в верхнем пределе: $\left(\int\limits_a^x f(t)dt \right)' = f(x)$.

© Алтайский государственный педагогический университет, 2021

1.8. Основная формула интегрального исчисления

Рассмотрим интеграл с переменным верхним пределом: $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt.$

Допустим, что функция f непрерывна на отрезке $[a;b]$, тогда по свойству 2 из 1.7 $\Phi'(x) = f(x)$, т. е. Φ – первообразная для подынтегральной функции на $[a;b]$.

Допустим, что F – есть какая-либо первообразная для f. Какая связь существует между любыми двумя первообразными для одной и той же функции?

Эта связь выражается равенством $\Phi(x) = F(x) + C$ (*)

Положим в равенстве (*) $x = a, \Phi(a) = F(a) + C$, где $\Phi(a) = \int_a^a f(t)dt = 0.$

Тогда $C = -F(a)$.

Положим далее в равенстве (*) $x = b$, получим $\Phi(b) = F(b) + C$, или $\Phi(b) = F(b) - F(a)$.

Учитывая, что $\Phi(b) = \int_a^b f(t)dt$ получаем $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$ (**).

Полученная формула называется формулой **Ньютона – Лейбница.**

Разность $F(b) - F(a)$ обозначается $F(x)|_a^b$.

Тогда $\int_a^b f(t)dt = F(x)|_a^b$.

Примеры:

1) $\int_{-1}^{3} x^2 dx = \frac{x^3}{3}|_{-1}^{3} = 9 - \left(-\frac{1}{3}\right) = 9\frac{1}{3};$

2) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x\, dx = -\cos x\,|_0^{\frac{\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - (-1) = \frac{1}{2}.$

© Алтайский государственный педагогический университет, 2021

1.9. Интегрирование подстановкой в определенном интеграле

Теорема. Пусть требуется вычислить $\int_a^b f(x)dx$, где функция f непрерывна на $[a;b]$. Положим $x = \varphi(t)$, подчинив функцию следующим условиям:

1) φ непрерывна на некотором отрезке $[\alpha, \beta]$, причем ее значения не выходят за пределы отрезка $[a;b]$, когда $t \quad [\alpha,\beta]$;

2) $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$;

3) существует в $[\alpha, \beta]$ непрерывная производная $\varphi'(t)$.

Тогда имеет место равенство $\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$ (*).

Доказательство:

В силу непрерывности f, φ, φ' соответственно на $[a;b]$и $[\alpha, \beta]$, непрерывны и функции $f(\varphi(t))$ и $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ на отрезке $[\alpha, \beta]$.

Почему? Поясните.

Тогда будут существовать определенные интегралы $\int_a^b f(x)dx$ и $\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$, а также неопределенные интегралы $\int f(x)dx$ и $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$, причем $\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$.

Почему? Поясните.

Значит, если $F(x)$ – первообразная для f на $[a, b]$, то $F(\varphi(t))$ – первообразная для $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ на $[\alpha, \beta]$.

Поэтому имеем одновременно:

$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$,

$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) = F(b) - F(a)$.

Итак, $\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$.

© Алтайский государственный педагогический университет, 2021

Пример 1:

$$\int_0^r \sqrt{r^2-x^2}dx = \left|\begin{array}{l} r>0 \\ x = r\sin t \\ dx = r\cos t\,dt \\ a = 0 \to 0 = r\sin t \to \alpha = 0 \\ b = r \to r = r\sin t \to \beta = \frac{\pi}{2} \end{array}\right| = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{r^2 - r^2\sin^2 t}\cdot r\cos t\,dt =$$

$$= r^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt = r^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2}dt = \frac{r^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} dt + \frac{r^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2t dt =$$

$$= \frac{r^2}{2}t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{r^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\cos 2t\,d(2t) = \frac{r^2}{2}\frac{\pi}{2} + \frac{r^2}{4}\sin 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{r^2}{4}\pi + \frac{r^2}{4}(0-0) = \frac{r^2\pi}{4}$$

Замечание. Часто вместо подстановки $x = \varphi(t)$ удобно делать подстановку $\psi(x) = t$, тогда пределы интегрирования в новом интеграле будут $\psi(a) = \alpha$, $\psi(b) = \beta$.

Функция ψ должна быть обратимой, и обратная ей ψ^{-1} должна удовлетворять условиям доказанной теоремы.

Пример 2: $\int_0^{ln\,5} \frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}dt$.

Сделаем подстановку $\sqrt{e^x-1} = t$.

При $x = 0$ $t = 0$; при $x = ln5, \sqrt{e^{ln5}-1} = \sqrt{4} = 2$, то есть $t \in [0, 2]$. Покажем, что такая подстановка законна.

Функция $t = \sqrt{e^x-1}$ обратима: $e^x - 1 = t^2 \Rightarrow e^x = t^2+1, x = ln(t^2+1)$.

Обратная функция имеет непрерывную производную $x' = \frac{2t}{t^2+1}$ на $[0, 2]$.

Тогда исходный интеграл будет равен

$$\int_0^2 \frac{(t^2+1)t}{t^2+4}\cdot\frac{2t}{t^2+1}dt = 2\int_0^2 \frac{t^2}{t^2+4}dt = 2\int_0^2 \frac{t^2+4-4}{t^2+4}dt = 2\int_0^2 dt - 8\int_0^2 \frac{dt}{t^2+4} =$$

$$= 2t\Big|_0^2 - 8\cdot\frac{1}{4}\int_0^2 \frac{dt}{1+\left(\frac{t}{2}\right)^2} = 4 - 2\cdot 2\int_0^2 \frac{d\frac{t}{2}}{1+\left(\frac{t}{2}\right)^2} = 4 - 4arctg\frac{t}{2}\Big|_0^2 = 4-\pi.$$

© Алтайский государственный педагогический университет, 2021

1.10. Интегрирование по частям в определенном интеграле

Теорема. Пусть функции u и v имеют непрерывные производные на отрезке $[a;b]$.

Тогда $\int_a^b udv = uv|_a^b - \int_a^b vdu$.

Доказательство:

Имеем $(uv)' = u'v + uv'$. Следовательно, функция uv есть первообразная для непрерывной функции $u'v + uv'$.

Поясните, почему она непрерывна.

Тогда по формуле Ньютона – Лейбница $\int_a^b (u'v + uv')dx = uv|_a^b$.

В силу непрерывности u' и v' функции u и v тоже непрерывны, следовательно, интегралы $\int_a^b u'vdx$ и $\int_a^b uv'dx$ существуют и равны соответственно $\int_a^b vdu$ и $\int_a^b udv$.

Тогда $\int_a^b vdu + \int_a^b udv = uv|_a^b$, откуда $\int_a^b udv = uv|_a^b - \int_a^b vdu$.

Пример.

$$\int_0^\pi x^2 \cos x\, dx = \left\langle \begin{matrix} u = x^2, du = 2xdx \\ dv = \cos x\, dx, v = \sin x \end{matrix} \right\rangle = x^2 \sin x\,|_0^\pi - 2\int_0^\pi x \sin x\, dx =$$

$$= \left\langle \begin{matrix} u = x, du = dx \\ dv = \sin x\, dx, v = -\cos x \end{matrix} \right\rangle = -2\left(-x\cos x\,|_0^\pi + \int_0^\pi \cos x\, dx\right) = -2\pi + \sin x\,|_0^\pi = -2\pi.$$

© Алтайский государственный педагогический университет, 2021

Задания для самоконтроля

1. Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла.
2. Понятие определенного интеграла. Символическая запись, терминология.
3. Необходимое условие существования определенного интеграла.
4. Суммы Дарбу, их свойства.
5. Достаточное условие существования определенного интеграла.
6. Свойства определенного интеграла, выражаемые равенствами.
7. Свойства определенного интеграла, выражаемые неравенствами.
8. Определенный интеграл с переменным верхним пределом, понятие, свойства.
9. Формула Ньютона – Лейбница (знать с выводом, уметь пояснять ее применение).
10. Интегрирование подстановкой в определенном интеграле (знать с выводом формулу интегрирования подстановкой, уметь пояснять ее применение).
11. Метод интегрирования по частям в определенном интеграле.

© Алтайский государственный педагогический университет, 2021

Глава 2. Приложения определенного интеграла в геометрии

2.1. Вычисление площадей плоских фигур

2.1.1. Площадь криволинейной трапеции

2.1.2. Вычисление площадей плоских фигур в декартовых координатах

2.1.3. Площадь криволинейной трапеции, ограниченной кривой, заданной параметрически

2.1.4. Площадь криволинейного сектора в полярных координатах

2.2. Длина дуги плоской кривой

2.2.1. Определение длины дуги плоской кривой

2.2.2. Вычисление длины дуги

2.2.3. Дифференциал дуги

2.3. Вычисление объема тела вращения

2.4. Площадь поверхности вращения

2.4.1. Определение площади поверхности вращения

2.4.2. Вычисление площади поверхности вращения

Задания для самоконтроля

© Алтайский государственный педагогический университет, 2021

2.1. Вычисление площадей плоских фигур

2.1.1. Площадь криволинейной трапеции

2.1.2. Вычисление площадей плоских фигур в декартовых координатах

2.1.3. Площадь криволинейной трапеции, ограниченной кривой, заданной параметрически

2.1.4. Площадь криволинейного сектора в полярных координатах

© Алтайский государственный педагогический университет, 2021

2.1.1. Площадь криволинейной трапеции

Рассмотрим криволинейную трапецию, ограниченную сверху графиком непрерывной неотрицательной функции $y = f(x)$, слева и справа – отрезками прямых: $x = a$ и $x = b$, снизу – отрезком $[a; b]$ оси Ox (рис. 6).

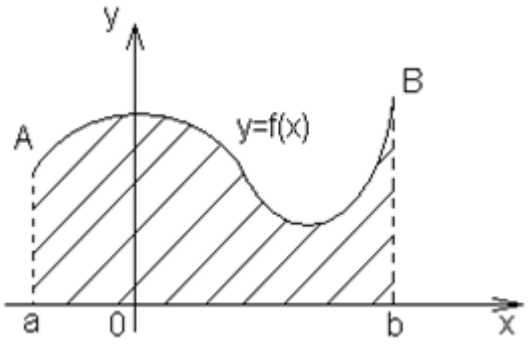


Рис. 6. Криволинейная трапеция

Рассматривая первую задачу, приводящую к понятию определенного интеграла, мы определили площадь криволинейной трапеции как $S_{тр} = \lim\limits_{d \to 0} \sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\, \Delta x_k$.

Поскольку f непрерывна на $[a; b]$, то такой предел существует и равен $\int_a^b f(x)dx$.

Итак, $S_{кр.тр.} = \int_a^b f(x)dx$.

Рассмотрим далее криволинейную трапецию, ограниченную графиком непрерывной неотрицательной функции $x = \varphi(y)$, отрезками прямых: $y = c, y = d$ и отрезком $[c; d]$ оси Oy (рис. 7).

Ее площадь выражается формулой $S_{cCDd} = \int_c^d \varphi(y)dy$

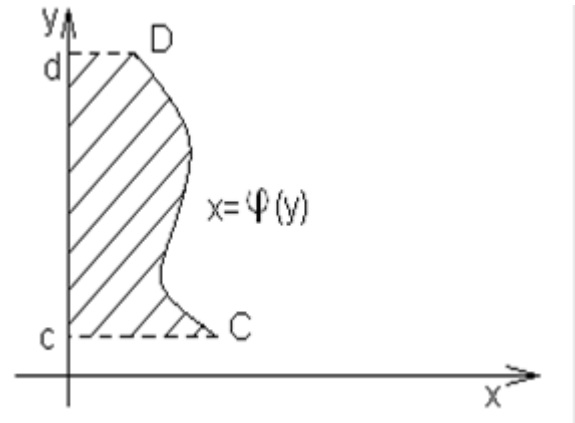


Рис. 7. Криволинейная трапеция с основанием, лежащим на оси ординат

© Алтайский государственный педагогический университет, 2021

2.1.2. Вычисление площадей плоских фигур в декартовых координатах

1) Пусть плоская фигура ограничена графиком непрерывной неположительной функции $y = f(x)$, отрезками прямых $x = a$ и $x = b$ и отрезком $[a; b]$ оси Ox (рис. 8).

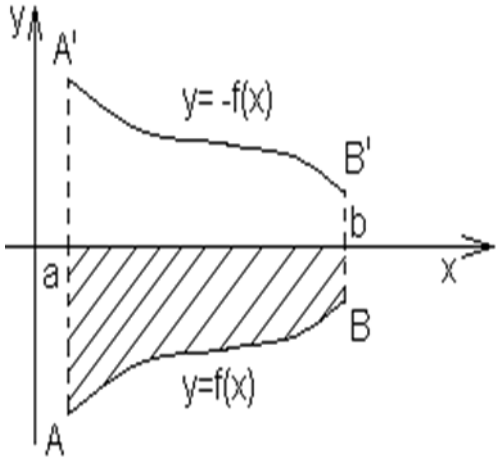


Рис. 8. Фигура $aABb$, не являющаяся криволинейной трапецией

Эта фигура не является криволинейной трапецией.

Рассмотрим функцию $y = -f(x)$. Она неотрицательна и непрерывна на $[a; b]$.

Фигура $aA'B'b$ – криволинейная трапеция.

$$S_{aA'B'b} = \int_a^b (-f(x))dx.$$

Фигуры $aABb$ и $aA'B'b$ равны. Следовательно, $S_{aABb} = -\int_a^b f(x)dx.$

2) Рассмотрим теперь случай, когда часть плоской фигуры находится над осью Ox, часть – под осью Ox (рис. 9).

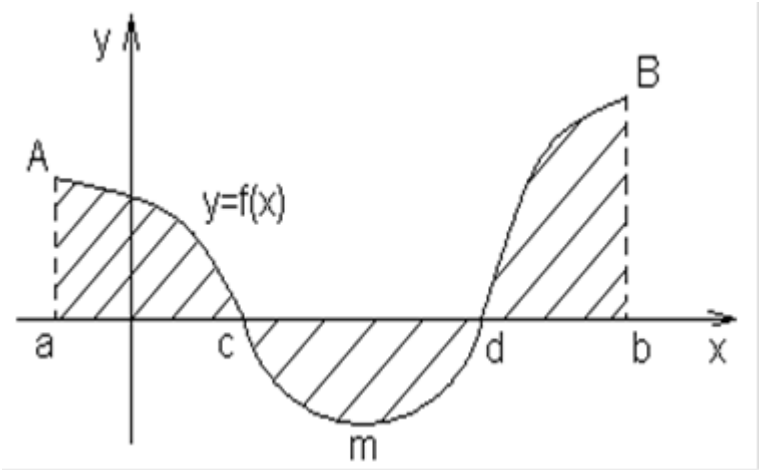


Рис. 9. Одна часть фигуры расположена над осью Ox, другая – под осью

© Алтайский государственный педагогический университет, 2021

Эта фигура не является криволинейной трапецией. Разобьем фигуру, изображенную на рисунке 9, на части: aAc, cmd, dBb.

$S_{aAc} = \int_a^c f(x)dx$, $S_{cmd} = -\int_c^d f(x)dx$, $S_{dBb} = \int_d^b f(x)dx$.

Итак, $S_{aAmBb} = \int_a^c f(x)dx - \int_c^d f(x)dx + \int_d^b f(x)dx$.

Пример 1. Вычислим площадь фигуры, ограниченной параболой $x = 2y - y^2$ и осью Oy (рис. 10).

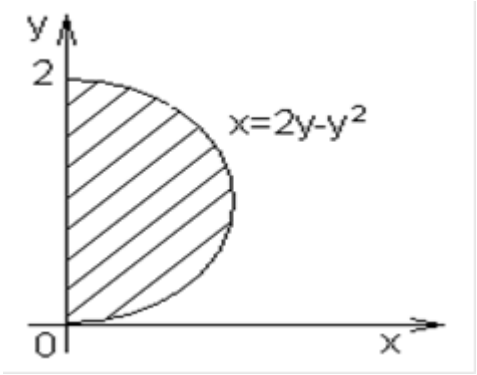


Рис. 10. Графическая иллюстрация задания в примере 1

$$S = \int_0^2 (2y - y^2)dy = 2\int_0^2 ydy - \int_0^2 y^2 dy = y^2|_0^2 - \frac{y^3}{3}|_0^2 = 4 - \frac{8}{3} = \frac{4}{3}$$ (кв. ед.).

3) Пусть плоская фигура ограничена снизу и сверху графиками непрерывных неотрицательных и непересекающихся функций $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$ (рис. 11).

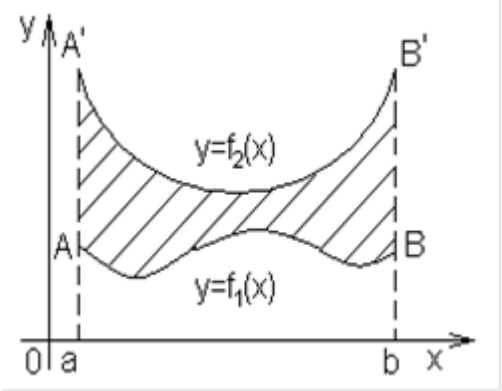


Рис. 11. Фигура ограничена снизу и сверху различными фигурами

Нетрудно увидеть, что площадь такой фигуры находится как разность площадей двух криволинейных трапеций $aA'B'b$ и $aABb$. Площадь первой $aA'B'b$ обозначим $-S_1$, второй – S_2.

© Алтайский государственный педагогический университет, 2021

$S_1 = \int_a^b f_1(x)dx$, $S_2 = \int_a^b f_2(x)dx$.

Итак, $S_{AA'B'B} = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx$.

4) Пусть теперь плоская фигура ограничена непрерывными кривыми $y = f(x)$ и $y = g(x)$, которые могут быть и отрицательными (рис. 12).

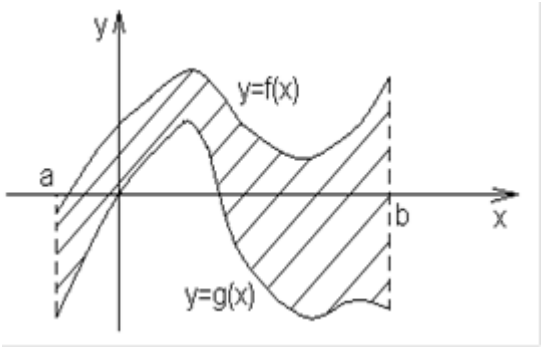


Рис. 12. Общий вид расположения плоской фигуры

Функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$, непрерывны на $[a;b]$, следовательно, ограничены на нем, значит, существует такое число $M > 0$, что $|f(x)| \le M$ и $|g(x)| \le M$.

Рассмотрим функции $y = f(x) + M$ и $y = g(x) + M$.

Они неотрицательны и графики их получаются параллельным переносом графиков $y = f(x)$ и $y = g(x)$, вверх на M. Площадь данной фигуры равна площади фигуры, ограниченной кривыми $y = f(x) + M$ и $y = g(x) + M$.

Следовательно, $S = \int_a^b \big((f(x) + M) - (g(x) + M)\big)dx = \int_a^b (f(x) - g(x))dx$..

5) Рассмотрим фигуру, изображенную на рисунке 13.

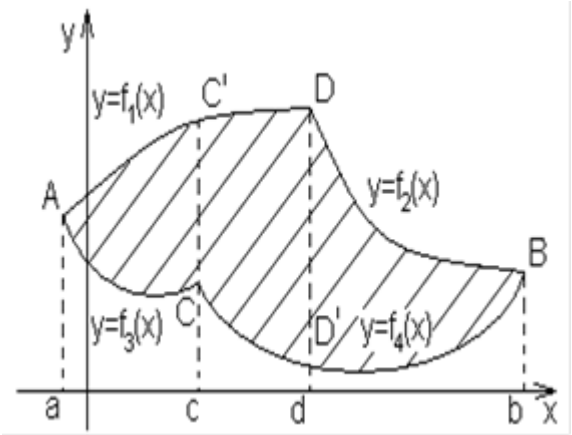


Рис. 13. Фигура общего расположения

© Алтайский государственный педагогический университет, 2021

Через точки C и D проведем прямые, параллельные оси Оy. Данная фигура разобьется на три фигуры: $AC/C, CC/DD/, D/DB$.

Тогда, $S_{ADBCA} = \int_a^c (f_1(x) - f_3(x))dx + \int_c^d (f_1(x) - f_4(x))dx + \int_d^b (f_2(x) - f_4(x))dx$.

Пример 2. Вычислим площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$, $y = \frac{1}{2}x^2$ и $y = 3x$ (рис. 14).

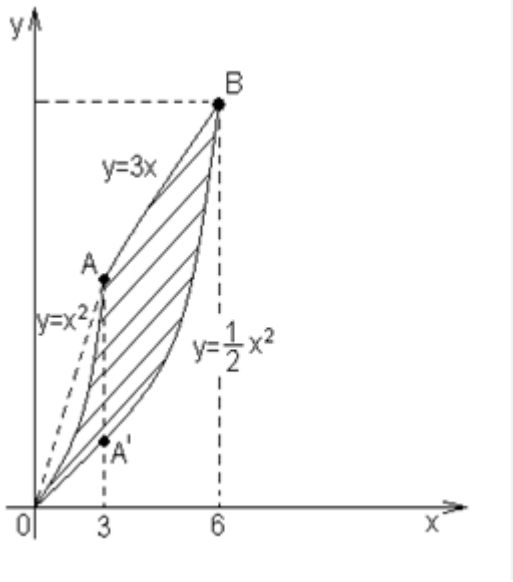


Рис. 14. Графическая иллюстрация задания в примере 2

Найдем абсциссы точек пересечения $y = x^2$ и $y = 3x$, это будут $x = 0$ или $x = 3$, а линии $y = \frac{1}{2}x^2$ и $y = 3x$ пересекаются в точках с абсциссами $x = 0$ или $x = 6$.

Разобьем данную область $0AB0$ на две прямой $x = 3$.

Тогда, $S = S_{OAA'} + S_{A'AB} = \int_0^3 \left(x^2 - \frac{1}{2}x^2\right)dx + \int_3^6 \left(3x - \frac{1}{2}x^2\right)dx = 13{,}5$

© Алтайский государственный педагогический университет, 2021

2.1.3. Площадь криволинейной трапеции, ограниченной кривой, заданной параметрически

Пусть кривая AB, ограничивающая трапецию сверху, задана параметрически:

$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$, $\alpha \le t \le \beta$, причем $\varphi(\alpha) = a$, $\psi(\beta) = b$ (рис. 15).

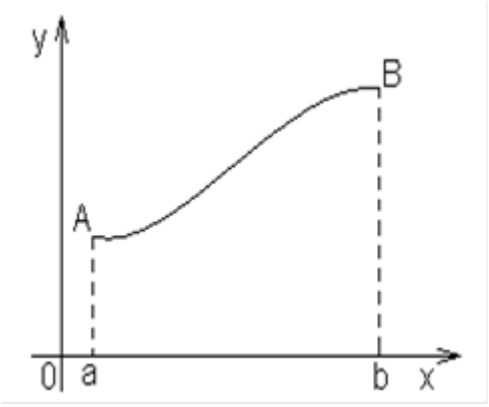


Рис. 15. Кривая AB задана параметрически

Предположим, что функции φ и ψ удовлетворяют требованиям:

1) ψ непрерывна на $[\alpha, \beta]$;

2) φ имеет непрерывную производную на $[\alpha, \beta]$;

3) φ' знакопостоянна на $[\alpha, \beta]$.

Исходя из этих условий, что можно сказать об обратимости функции φ?

Поскольку φ' знакопостоянна, то φ является монотонной на $[\alpha, \beta]$, следовательно, $x = \varphi(t)$ обратима и существует обратная функция $t = \varphi^{-1}(x)$, определенная на отрезке $[a; b]$ с множеством значений $[\alpha, \beta]$. Тогда функции $y = \psi(t)$ и $t = \varphi^{-1}(x)$ образуют сложную функцию $y = \psi(\varphi^{-1}(x))$.

Тогда $S = \int_a^b \psi(\phi^{-1}(x))dx$.

В интеграле $\int_a^b \psi(\phi^{-1}(x))dx$ сделаем подстановку $\varphi^{-1}(x) = t$, откуда $x = \varphi(t)$, $dx = \varphi'(t)dt$ и $S = \int_\alpha^\beta \psi(t)(\phi'(t))dt$ или $S = \int_\alpha^\beta yx_t'dt$.

Пример 3. Вычислим площадь фигуры, ограниченной одной аркой циклоиды $\begin{cases} x = a(t - sint), \\ y = a(1 - cost), \end{cases}$ $0 \le t \le 2\pi$ и осью Ox (рис. 16).

© Алтайский государственный педагогический университет, 2021

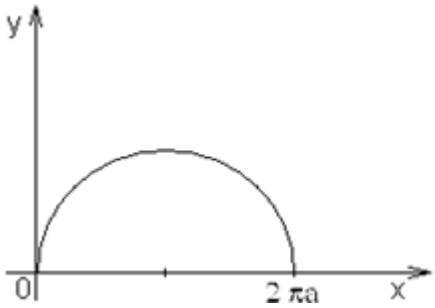


Рис. 16. Графическое изображение циклоиды

$$S = \int_0^{2\pi} a(1-\cos t)a(1-\cos t)dt = a^2 \int_0^{2\pi} (1-\cos t)^2 dt =$$

$$= a^2 \int_0^{2\pi} dt - 2a^2 \int_0^{2\pi} \cos t\, dt + a^2 \int_0^{2\pi} \cos^2 t\, dt = a^2 2\pi - 2a^2 \sin t\,|_0^{2\pi} +$$

$$+a^2 \int_0^{2\pi} \frac{1+\cos 2t}{2} dt = 2a^2\pi + \frac{a^2}{2} t|_0^{2\pi} + \frac{a^2}{2\cdot 2} \sin 2t|_0^{2\pi} = 3a^2\pi.$$

© Алтайский государственный педагогический университет, 2021

2.1.4. Площадь криволинейного сектора в полярных координатах

Рассмотрим криволинейный сектор *OAB,* ограниченный дугой кривой *AB*, заданной в полярной системе координат уравнением $r = f(\varphi)$ и двумя радиусами-векторами *OA* и *OB*, образующими с полярной осью соответственно углы $\varphi = \alpha$ и $\varphi = \beta$ $(\alpha < \beta)$.

Поставим задачу о вычислении площади криволинейного сектора. Будем предполагать, что функция $r = f(\varphi)$ непрерывна на $[\alpha, \beta]$.

Разобьем $[\alpha, \beta]$ на *n* частей точками $\alpha = \varphi_0 < \varphi_1 < \cdots < \varphi_{k-1} < \varphi_k < \cdots << \varphi_n = \beta$.

Проведем радиусы-векторы OM_k $(k = \overline{1,n})$, соответствующие полярным углам φ_k.

Тогда сектор *OAB* разобьется на частичные $OM_{k-1}M_k$ (рис. 17).

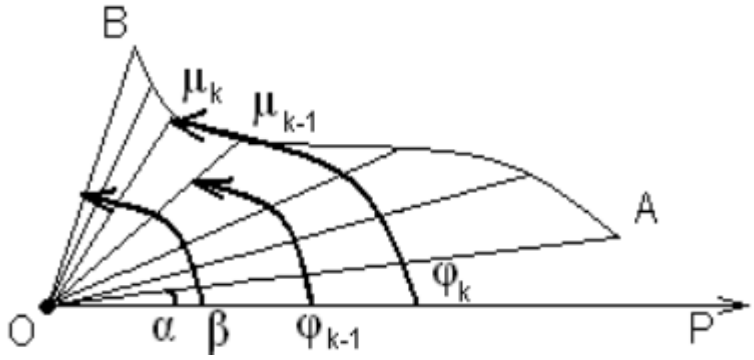


Рис. 17. Разбиение криволинейного сектора на частичные

В пределах каждого частичного отрезка $[\varphi_{k-1}, \varphi_k]$ выберем произвольное значение θ_k аргумента φ и вычислим значение функции $\varphi(\theta_k)$ (рис. 18).

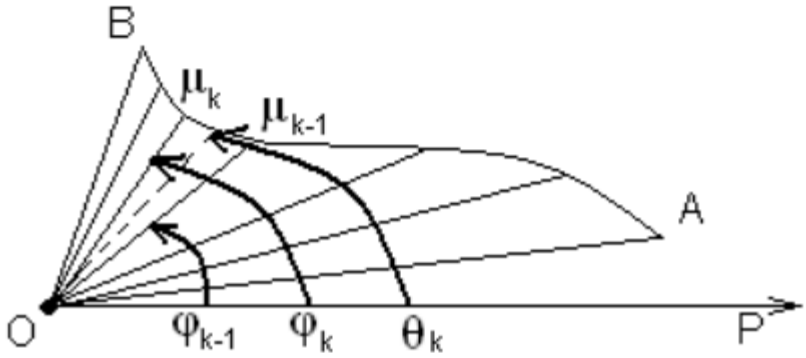


Рис. 18. Частичный криволинейный сектор

Далее каждый криволинейный сектор заменим круговым сектором с радиусом $f(\theta_k)$ и ограниченным лучами φ_{k-1} и φ_k. Его площадь $S_k = \frac{1}{2}(f(\theta_r))^2(\phi_k - \phi_{k-1})$. Площадь фигуры, составленной из круговых секторов, будет равна $S_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2}(f(\theta_r))^2 \Delta\phi_k$, где $\Delta\varphi_k = \varphi_k - \varphi_{k-1}$.

© Алтайский государственный педагогический университет, 2021

Под площадью S криволинейного сектора будем понимать $S = \lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ d\to 0}} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{2}\left(f(\theta_r)\right)^2 \Delta\phi_k$.

Сумма $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{2}\left(f(\theta_r)\right)^2 \Delta\phi_k$ – интегральная сумма для функции f на отрезке $[\alpha, \beta]$. Поскольку f непрерывна на $[\alpha, \beta]$, предел этой интегральной суммы существует и равен $\int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2}\left(f(\phi)\right)^2 d\phi$.

Итак, площадь криволинейного сектора $S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \left(f(\phi)\right)^2 d\phi$.

Пример 4. Найти площадь кардиоиды $r = a(1 - cos\varphi)$ (рис. 19).

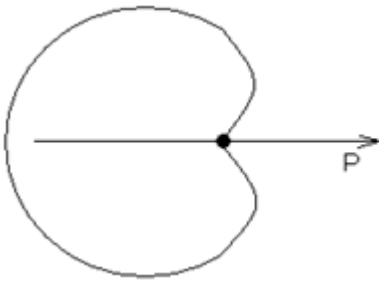


Рис. 19. Графическое представление кардиоиды

$$S = 2 \cdot \frac{1}{2}\int_0^{\pi} a^2 (1 - cos\,\phi)^2 d\phi = a^2 \int_0^{\pi} d\phi - 2a^2 \int_0^{\pi} cos\,\phi\, d\phi + 2a^2 \int_0^{\pi} \frac{1 + cos\,2\,\phi}{2} d\phi =$$

$$= a^2\pi - 2a^2\, sin\,\phi\,|_0^{\pi} + a^2 \frac{1}{2}\phi|_0^{\pi} + \frac{a^2}{2 \cdot 2}\int_0^{\pi} cos\,2\,\phi\, d2\phi = a^2\pi + \frac{1}{2}a^2\pi + \frac{a^2}{4} sin\,2\,\phi|_0^{\pi} = \frac{3}{2}a^2\pi.$$

© Алтайский государственный педагогический университет, 2021

2.2. Длина дуги плоской кривой

2.2.1. Определение длины дуги плоской кривой

2.2.2. Вычисление длины дуги

2.2.3. Дифференциал дуги

© Алтайский государственный педагогический университет, 2021

2.2.1. Определение длины дуги плоской кривой

Пусть имеем плоскую простую кривую, заданную параметрически $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$, $\alpha \le t \le \beta$, причем φ, ψ – непрерывные функции на отрезке $[\alpha, \beta]$, причем такие, что каждым двум различным значениям параметра из $[\alpha, \beta]$ соответствуют различные точки кривой. Пусть значению $t = \alpha$ соответствует точка A, а значению $t = \beta$ – точка B.

Разобьем отрезок $[\alpha, \beta]$ на n частей точками $\alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_{k-1} < t_k < \cdots < t_n = \beta$.

Каждому значению параметра t_k $(k = \overline{1,n})$ соответствует точка дуги $M_k(\varphi(t_k), \psi(t_k))$. Соединим точки $A = M_0, M_1, \ldots, M_{k-1}, M_k, \ldots, M_n = B$ последовательно прямолинейными отрезками.

В результате получим ломаную $AM_1M_2 \ldots M_{n-1}B$, вписанную в дугу AB (рис. 20).

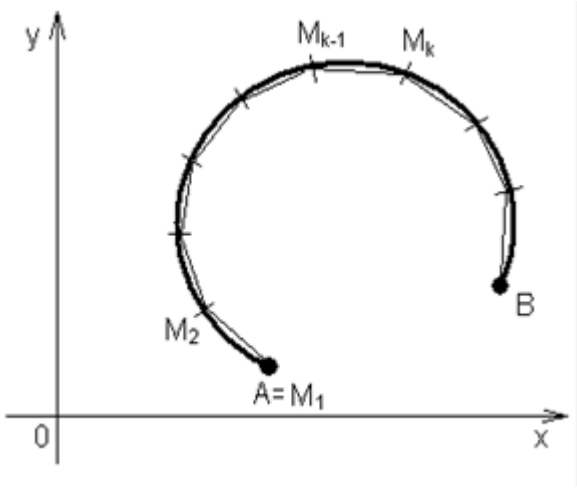


Рис. 20. Ломаная, вписанная в дугу

Длину каждого звена ломаной можно легко определить, длина P всей ломаной есть сумма длин звеньев ломаной. Увеличивая число делящих точек, будем получать новые ломаные и последовательность длин ломаных, вписанных в дугу.

Определение. Длиной l дуги AB будем называть предел последовательности длин P ломаных, вписанных в эту дугу, при условии $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$ – длина каждого частичного отрезка стремится к нулю, т. е. диаметр разбиения $d \to 0$. Итак, $l = \lim\limits_{d \to 0} p$ (1).

Кривые, для которых предел (1) существует, называются спрямляемыми.

© Алтайский государственный педагогический университет, 2021

2.2.2. Вычисление длины дуги

Опираясь на введенное определение, выведем формулу для вычисления длины дуги. Будем предполагать, что функции φ, ψ – непрерывные функции на отрезке $[\alpha, \beta]$ и имеют непрерывные производные φ', ψ'.

Вычислим длину звена $M_{k-1}M_k$ ломаной: $|M_{k-1}M_k| = \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (y_k - y_{k-1})^2} =$
$= \sqrt{\left(\varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1})\right)^2 + \left(\psi(t_k) - \psi(t_{k-1})\right)^2}$.

На отрезке $[t_{k-1}, t_k]$ функции φ, ψ удовлетворяют условиям теоремы Лагранжа.

Применим ее к этим функциям.

Тогда $|M_{k-1}M_k| = \sqrt{(\varphi'(\tau_k)\Delta t_k)^2 + (\psi'(\theta_k)\Delta t_k)^2} = \sqrt{\left(\varphi'(\tau_k)\right)^2 + \left(\psi'(\theta_k)\right)^2}\Delta t_k$.

Длина периметра ломаной $P = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\left(\varphi'(\tau_k)\right)^2 + \left(\psi'(\theta_k)\right)^2}\Delta t_k$ (2).

Если во втором слагаемом подкоренного выражения заменить θ_k на τ_k, то полученная $\sum_{k=1}^{n} \sqrt{\left(\varphi'(\tau_k)\right)^2 + \left(\psi'(\tau_k)\right)^2}\Delta t_k$ (3) будет интегральной суммой σ для функции $\sqrt{\left(\varphi'(t_k)\right)^2 + \left(\psi'(t_k)\right)^2}$

В силу непрерывности φ', ψ' на $[\alpha, \beta]$: $\lim\limits_{d\to 0} \sqrt{\left(\varphi'(\tau_k)\right)^2 + \left(\psi'(\tau_k)\right)^2}\Delta t_k$ будет существовать и представлять $\int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\left(\varphi'(t)\right)^2 + \left(\psi'(t)\right)^2}\, dt$.

Для того чтобы показать, что $\lim\limits_{d\to 0} P = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\left(\varphi'(t)\right)^2 + \left(\psi'(t)\right)^2} dt$ достаточно показать, что $\lim\limits_{d\to 0} (\sigma - P) = 0$.

© Алтайский государственный педагогический университет, 2021

Оценим разность:

$$|P-\sigma| = \left|\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\left(\varphi'(\tau_k)\right)^2+\left(\psi'(\theta_k)\right)^2}\Delta t_k - \sum_{k=1}^{n}\sqrt{\left(\varphi'(\tau_k)\right)^2+\left(\psi'(\tau_k)\right)^2}\Delta t_k\right| \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n}\left|\sqrt{\left(\varphi'(\tau_k)\right)^2+\left(\psi'(\theta_k)\right)^2}-\sqrt{\left(\varphi'(\tau_k)\right)^2+\left(\psi'(\tau_k)\right)^2}\right|\Delta t_k.$$

Применим к каждому слагаемому элементарное неравенство $\left|\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{a^2+c^2}\right| \leq |b-c|$.

Получим $|P-\sigma| \leq \sum_{k=1}^{n}\left|\psi'(\tau_k)-\psi'(\theta_k)\right|\Delta t_k$.

В силу непрерывности функции ψ' по любому заданному $\varepsilon > 0$ можно найти такое $\sigma > 0$, что из $|\tau_k - \theta_k| < \delta$ следует $\left|\psi'(\tau_k)-\psi'(\theta_k)\right| < \varepsilon$.

Возьмем все $\Delta t_k < \delta$, тогда $|\theta_k - \tau_k| < \delta \Rightarrow \left|\psi'(\theta_k)-\psi'(\tau_k)\right| < \varepsilon$.

Тогда $|P-\sigma| \leq \varepsilon\sum_{k=1}^{n}\Delta t_k = \varepsilon(\beta-\alpha)$, что доказывает $l = \int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\left(\varphi'(t)\right)^2+\left(\psi'(t)\right)^2}\,dt$.

Замечание. Если кривая задана явным уравнением в декартовых координатах $y = f(x), a \leq x \leq b$, параметризуем это уравнение: $\begin{cases} x = x \\ y = f(x) \end{cases}, x \in [a,b]$.

Получаем $l = \int_{a}^{b}\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx$..

Пример. Вычислим длину циклоиды $\begin{cases} x = a(t-sint) \\ y = a(1-cost) \end{cases}, t \in [0,2\pi]$.

$$l = \int_{0}^{2\pi}\sqrt{a^2(1-\cos t)^2+a^2\sin^2 t}\,dt =$$

$$= a\int_{0}^{2\pi}\sqrt{1-2\cos t+\cos^2 t+\sin^2 t}\,dt =$$

© Алтайский государственный педагогический университет, 2021

$$= a\int_0^{2\pi}\sqrt{2(1-\cos t)}\,dt =$$

$$= a\int_0^{2\pi}\sqrt{4\sin^2\frac{t}{2}}dt = a\int_0^{2\pi}2\sin\frac{t}{2}\,dt =$$

$$= 2a\int_0^{2\pi}2\sin\frac{t}{2}d\frac{t}{2} = -4a\cos\frac{t}{2}|_0^{2\pi} = 8a.$$

© Алтайский государственный педагогический университет, 2021

2.2.3. Дифференциал дуги

Пусть плоская самонепересекающаяся кривая задана уравнениями $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$, $\alpha \le t \le \beta$, где φ, ψ, φ', ψ' непрерывны на отрезке $[\alpha, \beta]$. Возьмем на кривой две точки: M_0, соответствующую параметру α, и M, соответствующую параметру t, тогда длина дуги l есть функция от t.

$$l(t) = \int_{\alpha}^{t} \sqrt{\left(\varphi'(u)\right)^2 + \left(\psi'(u)\right)^2}\, du.$$

Применяя правило дифференцирования по верхнему пределу, получим $\frac{dl}{dt} = \sqrt{\left(\varphi'(t)\right)^2 + \left(\psi'(t)\right)^2}$ или $dl = \sqrt{\left(\varphi'(t)\right)^2 + \left(\psi'(t)\right)^2}\, dt.$

Это формула дифференциала дуги. Ее можно записать $dl = \sqrt{\left(x_t'\right)^2 + \left(y_t'\right)^2}\, dt.$

Возведя в квадрат, получим $(dl)^2 = \left(x_t'\right)^2 (dt)^2 + \left(y_t'\right)^2 (dt)^2$, откуда $(dl)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$.

© Алтайский государственный педагогический университет, 2021

2.3. Вычисление объема тела вращения

Пусть криволинейная трапеция, ограниченная кривой $y = f(x)$, отрезками прямых $x = a$, $x = b$ и отрезком $[a; b]$ оси Оx, вращается вокруг оси Оx (рис. 21).

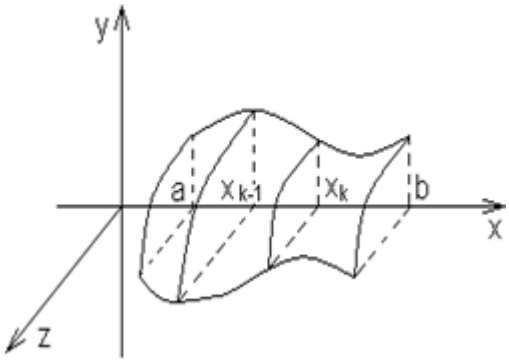


Рис. 21. Тело вращения

$$\Delta v_k = \pi f^2(\xi_k)\Delta x_k.$$

$$V \approx \sum_{k=1}^{n} \pi \cdot f^2(\xi_k)\Delta x_k.$$

$$V = \int_a^b \pi \cdot f^2(x)\,dx.$$

Пример. Пусть эллипс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ вращается вокруг оси Оx. Найдем объем полученного тела вращения.

Выразим из уравнения эллипса $y^2 = b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$.

$$V = 2\pi \int_0^a b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)dx = 2\pi b^2\left(x|_0^a - \frac{x^3}{3a^2}|_0^a\right) = 2\pi b^2\left(a - \frac{a^3}{3a^2}\right) = 2\pi b^2 \frac{2}{3}a = \frac{4}{3}\pi a b^2.$$

© Алтайский государственный педагогический университет, 2021

2.4. Площадь поверхности вращения

2.4.1. Определение площади поверхности вращения

2.4.2. Вычисление площади поверхности вращения

© Алтайский государственный педагогический университет, 2021

2.4.1. Определение площади поверхности вращения

Рассмотрим поверхность П, образованную вращением вокруг оси Ox графика функции $y = f(x)$, заданной на отрезке $[a, b]$.

Определим понятие площади поверхности вращения.

Пусть T – разбиение отрезка $[a, b]$ точками:

$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{k-1} < x_k < \cdots < x_n = b$ и пусть $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_{k-1}, A_k, \ldots, A_n$ – соответствующие точки графика функции.

Построим ломаную $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_{k-1}, A_k, \ldots, A_n$.

При вращении ломаной получим поверхность П (x_k), составленную из усеченных конусов, образованных при вращении трапеции $x_{k-1}A_{k-1}A_k x_k$, $k = \overline{1,n}$ (рис. 22).

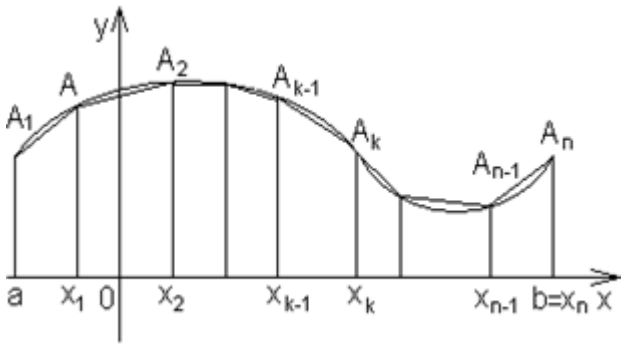


Рис. 22. Дуга и вписанная в неё ломаная

Если $y_k = f(x_k)$, а l_k, – длина k-го звена ломаной, т. е. отрезка $A_{k-1}A_k$, то $P(x_k) = 2\pi \sum_{k=1}^{n} \frac{y_k + y_{k-1}}{2}$.

$P(x_k)$ – площадь поверхности П(x_k).

Определение 1. Число P называется пределом площади $P(x_k)$, если для любого $\varepsilon > 0$ можно найти такое $\delta > 0$, что для любого разбиения T отрезка $[a; b]$, диаметр которого $d < \delta$, выполняется неравенство $|P(x_k) - P| < \varepsilon$.

Определение 2. Поверхность вращения П назовем квадрируемой, если существует $\lim_{d \to 0} P(x_k) = P$. При этом число P назовем площадью поверхности вращения P.

© Алтайский государственный педагогический университет, 2021

2.4.2. Вычисление площади поверхности вращения

Теорема. Если функция f имеет на отрезке $[a;b]$ непрерывную производную f', то поверхность П, образованная вращением графика функции f вокруг оси Ox, квадрируема, а площадь P может быть выражена формулой:

$$П = 2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\, dx.$$

Доказательство:

Длина l_k звена $A_{k-1}A_k$ ломаной $A_0, A_1, A_2, \dots, A_{k-1}, A_k, \dots, A_n$ равна $l_k = \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (y_k - y_{k-1})^2}$.

По формуле Лагранжа

$$y_k - y_{k-1} = f(x_k) - f(x_{k-1}) = f'(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = f'(\xi_k)\Delta x_k.$$

Почему здесь применима теорема Лагранжа?

Тогда $l_k = \sqrt{(\Delta x_k)^2 + \left(f'(\xi_k)\right)^2 (\Delta x_k)^2} = \sqrt{1 + \left(f'(\xi_k)\right)^2}\,\Delta x_k$.

Площадь, образованная вращением k-го звена ломаной

$$\Delta P(x_k) = 2\pi \frac{f(x_k) + f(x_{k-1})}{2} \sqrt{1 + \left(f'(\xi_k)\right)^2}\,\Delta x_k.$$

Площадь поверхности, образованной при вращении ломаной, будет равна

$$P(x_k) = \sum_{k=1}^{n} 2\pi \frac{f(x_k) + f(x_{k-1})}{2} \sqrt{1 + \left(f'(\xi_k)\right)^2}\,\Delta x_k =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} 2\pi \left(f(\xi_k) - f(\xi_k) + \frac{f(x_k) + f(x_{k-1})}{2} \right) \sqrt{1 + \left(f'(\xi_k)\right)^2}\,\Delta x_k =$$

$$= 2\pi \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \sqrt{1 + \left(f'(\xi_k)\right)^2}\,\Delta x_k + \sum_{k=1}^{n} 2\pi \frac{f(x_k) + f(x_{k-1}) - 2f(\xi_k)}{2} \sqrt{1 + \left(f'(\xi_k)\right)^2}\,\Delta x_k =$$

$$= 2\pi \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \sqrt{1 + \left(f'(\xi_k)\right)^2}\,\Delta x_k +$$

$$+\pi \sum_{k=1}^{n} \left(\left(f(x_k) - f(\xi_k)\right) + \left(f(x_{k-1}) - f(\xi_k)\right) \right) \cdot \sqrt{1 + \left(f'(\xi_k)\right)^2}\,\Delta x_k.$$

© Алтайский государственный педагогический университет, 2021

Первая сумма есть интегральная сумма для функции $f(x)\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}$, которая является непрерывной на $[a;b]$.

Почему?

Тогда существует

$$\lim_{d\to 0} 2\pi \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\sqrt{1+\left(f'(\xi_k)\right)^2}\,\Delta x_k = 2\pi \int_a^b \left(f(x)\right)\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx.$$

Докажем, что предел второго слагаемого при $d \to 0$ равен 0.

Зададим произвольно $\varepsilon > 0$. Поскольку f непрерывна на $[a;b]$, а значит, и равномерно непрерывна на $[a;b]$, то по заданному $\varepsilon > 0$ можно найти такое $\delta > 0$, что при $d < \delta$ выполняются неравенства $|f(x_k) - f(\xi_k)| < \varepsilon$ и $|f(x_{k-1}) - f(\xi_k)| < \varepsilon$.

Дадим оценку второй сумме:

$$\pi \sum_{k=1}^{n} \left|\left(f(x_k) - f(\xi_k)\right) + \left(f(x_{k-1}) - f(\xi_k)\right)\sqrt{1+\left(f'(\xi_k)\right)^2}\,\Delta x_k\right| \le$$

$$\le \pi \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(\xi_k)|\sqrt{1+\left(f'(\xi_k)\right)^2}\,\Delta x_k + \pi \sum_{k=1}^{n} |f(x_{k-1}) - f(\xi_k)|\sqrt{1+\left(f'(\xi_k)\right)^2}\,\Delta x_k \le$$

$$\le \pi\varepsilon \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1+\left(f'(\xi_k)\right)^2}\,\Delta x_k + \pi\varepsilon \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1+\left(f'(\xi_k)\right)^2}\,\Delta x_k.$$

Утверждаем, что $\sqrt{1+\left(f'(\xi_k)\right)^2}$ ограничен.

Почему?

В силу непрерывности f на $[a;b]$, тогда существует такое $M > 0$, что $\sqrt{1+\left(f'(\xi_k)\right)^2} \le M$.

И для второй суммы получаем оценку:

$$\underbrace{\pi\varepsilon M \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k}_{b-a} + \underbrace{\pi\varepsilon M \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k}_{b-a} = 2\pi\varepsilon M(b-a).$$

© Алтайский государственный педагогический университет, 2021

Отсюда видно, что при $d \to 0$вторая сумма стремится к нулю.

Итак, существует $\lim\limits_{d\to 0} P(x_k) = 2\pi \int_a^b |f(x)|\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx.$

Замечание. Если кривая задана параметрически $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$, $\alpha \le t \le \beta$, где φ, ψ, φ', ψ' – непрерывны на отрезке $[\alpha, \beta]$, то, сделав замену переменной $x = \varphi(t)$, получим:

$$P = 2\pi \int_\alpha^\beta |f(\varphi(t))|\sqrt{1+\left(f'(\varphi(t))\right)^2}\,\varphi'(t)\,dt =$$

$$= 2\pi \int_\alpha^\beta |f(\varphi(t))|\sqrt{\left(\varphi'(t)\right)^2+\left(f'(\varphi(t))\right)^2\left(\varphi'(t)\right)^2}\,dt = \langle f(\varphi(t)) = \psi(t)\rangle =$$

$$= 2\pi \int_\alpha^\beta |\psi(t)|\sqrt{\left(\varphi(t)\right)^2+\left(\psi'(t)\right)^2}\,dx.$$

Пример. Вычислим площадь поверхности, образованной вращением одной арки циклоиды вокруг оси O*x*.

$\begin{cases} x = a(t - sint) \\ y = a(1 - cost) \end{cases}$, $0 \le t \le 2\pi$ – уравнения циклоиды.

$$P = 2\pi \int_0^{2\pi} a(1-\cos t)\sqrt{a^2(1-\cos t)^2 + a^2\sin^2 t}\,dt =$$

$$= 2\pi \int_0^{2\pi} a^2(1-\cos t)\sqrt{1-2\cos t+\cos^2 t+\sin^2 t}\,dt = 2\pi a^2 \int_0^{2\pi} 2\sin^2\frac{t}{2}\sqrt{2(1-\cos t)}dt =$$

$$= 4\pi a^2 \int_0^{2\pi} \sin^2\frac{t}{2}\sqrt{4\sin^2\frac{t}{2}}dt = 8\pi a^2 \int_0^{2\pi} \sin^2\frac{t}{2}\sin\frac{t}{2}dt = -16\pi a^2 \int_0^{2\pi} \sin^2\frac{t}{2}d\cos\frac{t}{2} =$$

$$= -16\pi a^2 \int_0^{2\pi} \left(1-\cos^2\frac{t}{2}\right)d\cos\frac{t}{2} = -16\pi a^2\left(\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi} - \frac{\cos^3\frac{t}{2}}{3}\Big|_0^{2\pi}\right) =$$

$$= -16\pi a^2\left(-1-1-\frac{1}{3}(-1-1)\right) = \frac{64\pi a^2}{3}$$ (кв. ед.).

© Алтайский государственный педагогический университет, 2021

Задания для самоконтроля

1. Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла.

2. Понятие определенного интеграла. Символическая запись, терминология.

3. Исходя из формулировки и решения первой задачи, приводящей к понятию определенного интеграла, опираясь на введенное понятие определенного интеграла, запишите формулу вычисления площади криволинейной трапеции.

4. Вычисление площадей плоских фигур с помощью определенного интеграла в декартовых координатах (рассмотреть различные случаи расположения кривых, ограничивающих фигуру).

5. Вычисление площадей плоских фигур с помощью определенного интеграла в полярных координатах.

6. Вычисление объемов тел вращения с помощью определенного интеграла.

7. Понятие длины дуги.

8. Вычисление длины дуги плоской кривой с помощью определенного интеграла в декартовых координатах.

9. Вычисление длины дуги плоской кривой с помощью определенного интеграла в полярных координатах.

10. Понятие и вычисление площади поверхности пространственной фигуры с помощью определенного интеграла.

© Алтайский государственный педагогический университет, 2021

Глава 3. Приложения определенного интеграла в физике и механике

3.1. Схемы применения определенного интеграла

- 3.1.1. Схема элементов
- 3.1.2. Схема дифференциалов

3.2. Работа переменной силы

3.3. Масса неоднородного стержня

3.4. Давление жидкости на вертикальную пластину

3.5. Кинетическая энергия тела

3.6. Количество электричества

3.7. Статический момент и центр масс

- 3.7.1. Статический момент материальной точки
- 3.7.2. Статические моменты системы материальных точек
- 3.7.3. Центр масс системы материальных точек
- 3.7.4. Центр масс плоской кривой
- 3.7.5. Статический момент и центр масс плоской фигуры

3.8. Момент инерции

- 3.8.1. Момент инерции дуги материальной кривой
- 3.8.2. Момент инерции плоской материальной фигуры

Задания для самоконтроля

© Алтайский государственный педагогический университет, 2021

3.1. Схемы применения определенного интеграла

Прежде чем перейти к изложению приложений определенного интеграла в физике, механике и других областях знания и человеческой деятельности, выясним часто используемые схемы его применения.

Допустим, что необходимо вычислить значение некоторой величины A, например работы переменной силы, давления жидкости на вертикальную пластину, кинетической энергии, объема произведенной продукции, спроса и предложения продукции на рынке. Известно, что величина A связана с некоторым отрезком $[a, b]$ изменения некоторой независимой переменной (длиной перемещения тела, временем перемещения тела, глубиной погружения пластины, временем производства товара и т. п.). Сделаем предположение, что величина A аддитивна на отрезке $[a, b]$, т. е. при разбиении этого отрезка на частичные отрезки (непересекающиеся, имеющие только общие конечные точки) значение величины A на всем отрезке $[a, b]$ равно сумме значений ее на всех частичных отрезках разбиения. В этом случае для нахождения значения величины на отрезке $[a, b]$ используют обычно одну из двух нижеследующих схем применения определенного интеграла:

1) схему элементов;

2) схему дифференциалов.

3.1.1. Схема элементов

3.1.2. Схема дифференциалов

© Алтайский государственный педагогический университет, 2021

3.1.1. Схема элементов

Схема элементов основана на конструкции определенного интеграла и состоит из следующих этапов:

1. Отрезок $[a, b]$ произвольным образом разбивается на конечное число частичных отрезков точками:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{(k-1)} < x_k < \cdots < x_{(n-1)} < x_n = b.$$

2. В соответствии с построенным разбиением отрезка $[a, b]$ величина A разобьется на частичные элементы (слагаемые): $A = \sum_{k=1}^{n} \Delta A_k$.

На втором этапе вычисляем значение величины A на частичном отрезке $[x_{(k-1)}; x_k]$, которое обозначено ΔA_k. Для этого, выбрав произвольную точку $c_k \in [x_{(k-1)}; x_k]$, представляем значение ΔA_k в виде произведения функции f (найденной в условии задачи) в точке c_k на длину частичного отрезка Δx_k: $\Delta A_k = f(c_k)\Delta x_k$.

Следует отметить, что, вычисляя ΔA_k в условиях каждой конкретной задачи, обычно делаем некоторые допущения, например малый участок дуги заменяем на стягивающую его хорду, переменную скорость на малом частичном промежутке – постоянной скоростью в выбранной точке, переменную силу давления жидкости на достаточно малый вертикальный участок пластины – постоянным давлением в некоторой фиксированной точке c_k этого участка и т. п. Таким образом, значение ΔA_k получается приближенным.

3. В силу аддитивности вычисляемой величины A, ее значение представляется в виде суммы: $A \approx \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k$.

Нетрудно видеть, что данная сумма есть интегральная сумма, составленная для функции f на отрезке $[a, b]$.

4. Тогда искомую величину A представляют в виде предела интегральной суммы при $\max \Delta x_k$, стремящемся к нулю:

$$A = \lim_{d \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k = \int_a^b f(x)dx.$$

Итак, данная схема базируется на представлении интеграла как предела суммы бесконечно большого числа бесконечно малых величин.

© Алтайский государственный педагогический университет, 2021

3.1.2. Схема дифференциалов

Схема дифференциалов представляет собой несколько модифицированную схему элементов. Её еще называют методом отбрасывания бесконечно малых слагаемых высших порядков малости. Она состоит из нижеследующих этапов:

1. На отрезке $[a, b]$, с которым связана определяемая величина A, выбирают произвольно $x \in [a; b]$. Величина A становится функцией от x: $A = A(x)$.

2. Находим главную часть приращения величины A: ΔA при изменении независимой переменной x от значения x до $x + \Delta x$ на бесконечно малое слагаемое Δx. Но главная часть приращения ΔA, получаемая отбрасыванием бесконечно малого слагаемого более высокого порядка малости по сравнению Δx, есть дифференциал dA, который, как известно, равен $dA = f'(x)\Delta x$ (функция f составляется, опираясь на условия задачи). Учитывая, что по определению полагается $\Delta x = dx$, получаем $dA = f'(x)dx$.

3. В равенстве $\Delta A = dA + \alpha\Delta x$, где α есть бесконечно малая вместе с Δx, второе слагаемое есть бесконечно малая более высокого порядка малости по сравнению Δx. Следовательно, ΔA и dA эквивалентны, $\Delta A = dA$ с точностью до бесконечно малой.

4. Таким образом, $A = \int_a^b dA = \int_a^b f(x)dx$.

© Алтайский государственный педагогический университет, 2021

3.2. Работа переменной силы

Согласно определению, данному в 3.1, работа переменной силы F на отрезке $[a;b]$ $A = \lim\limits_{d\to 0}\sum\limits_{k=1}^{n} F(\xi_k)\Delta x_k$.

Если F непрерывна на отрезке $[a, b]$, то этот предел существует и равен определенному интегралу от F на отрезке $[a, b]$.

Итак, $A = \int_a^b F(x)dx$.

Пример. Вычислим работу, выполняемую при перемещении материальной точки массой m из точки $x = a$ в точку $x = b$, если притягивающая ее по закону Ньютона точка имеет массу μ и находится в начале координат.

Решение. Сила притяжения двух материальных точек по закону Ньютона равна $F(x) = \gamma\frac{m\mu}{x^2}$, где γ – гравитационная постоянная.

$$A = \int_a^b \gamma\frac{m\mu}{x^2}dx = \gamma m\mu\left(-\frac{1}{x}\right)|_a^b = \gamma m\mu\left(-\frac{1}{b}+\frac{1}{a}\right).$$

© Алтайский государственный педагогический университет, 2021

3.3. Масса неоднородного стержня

Пусть дан неоднородный тонкий стержень длиной L. Определим массу стержня, если известно, что в каждой его точке плотность есть заданная непрерывная функция абсциссы $\rho = \rho(x)$ этой точки, где $x \in [0, L]$. Если бы стержень был однородным, то есть плотность во всех его точках была бы постоянной, учитывая, что стержень тонкий, масса в этом случае была бы равна $m = \rho L$.

Изобразим стержень на числовой оси, поместив левый конец в начало координат, тогда правый конец стержня попадет в точку с абсциссой L (рис. 23).

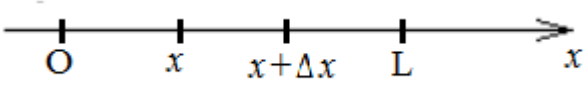


Рис. 23. Материальный стержень

Возьмем произвольную точку x на отрезке $[0, L]$. Дадим x приращение Δx такое, чтобы точка $x + \Delta x \in [0; L]$. Сделаем допущение, что на отрезке $[x; x + \Delta x]$ плотность стержня постоянна и равна плотности в точке x: $\rho = \rho(x)$ Тогда масса участка стержня $[x; x + \Delta x]$ будет равна $\Delta m \approx \rho(x)\,\Delta x$ (равенство приближенное в силу сделанного допущения). Следовательно, произведение $\rho(x)\Delta x$ есть главная часть приращения Δm и представляет собой дифференциал $dm = \rho(x)dx$. Для нахождения массы стержня остается по найденному дифференциалу массы восстановить интегрированием массу.

Итак, получаем формулу вычисления массы неоднородного стержня:

$$m = \int_0^L \rho(x)dx.$$

Пример. Определим массу шара радиуса R, если плотность материала, из которого он изготовлен, пропорциональна расстоянию от центра шара.

Решение. Поместим центр шара в начало координат, плоскость xOy расположим горизонтально, а ось Oz – перпендикулярно плоскости xOy. Возьмем произвольно точку x, принадлежащую отрезку $[0; R]$ оси Ox. По условию масса шара $m = m(x)$. Объем шара с центром в начале координат и радиусом x равен $v = 4/3\ \pi x^3$. Дадим x приращение Δx, объем шара изменится на величину Δv, которая равна разности объемов шаров с радиусами $x + \Delta x$ и x:

$$\Delta v = \frac{4}{3}\pi((x + \Delta x)^3 - x^3) = \frac{4}{3}\pi(3x^2 \cdot \Delta x + 3x \cdot (\Delta x)^2 + (\Delta x)^3).$$

© Алтайский государственный педагогический университет, 2021

Отбросив в последней скобке слагаемые, являющиеся бесконечно малыми более высокого порядка относительно Δx, получим: $\Delta v \approx \frac{4}{3}\pi\, 3x^2\, \Delta x$. Тогда для дифференциала получаем выражение $dv \approx \frac{4}{3}\,\pi\, 3x^2\, dx$.

По условию задачи плотность материала ρ в точке x равна $\rho = kx$ (пропорциональна расстоянию от центра). Допуская, что во всех точках полого шара плотность постоянна и равна $\rho = kx$, найдем приближенное значение его массы $dm = kxdv = 4k\pi x^3 dx$..

Искомую величину массы M шара радиуса R найдем, интегрируя dm в пределах от 0 до R:

$$M = 4k\pi \int_0^R x^3 dx = k\,\pi R^4.$$

© Алтайский государственный педагогический университет, 2021

3.4. Давление жидкости на вертикальную пластину

Воспользуемся законом Паскаля, согласно которому давление жидкости на горизонтальную пластину равно весу столба жидкости, имеющего основанием пластину, а высотой – глубину погружения пластины h (от свободной поверхности жидкости до пластины). Следовательно, давление жидкости $P = g\rho Sh$, где g – ускорение свободного падения, ρ – плотность жидкости, S – площадь пластины, h – высота столба жидкости. В силу того, что пластина вертикальна, различные точки лежат на различной глубине, данную формулу применить нельзя.

Направим ось Ox вертикально вниз, ось Oy горизонтально вправо по поверхности жидкости. Пусть пластина ограничена сверху кривой $y = F(x)$, снизу $y = f(x)$ и прямыми $x = a$ и $x = b$ (рис. 24).

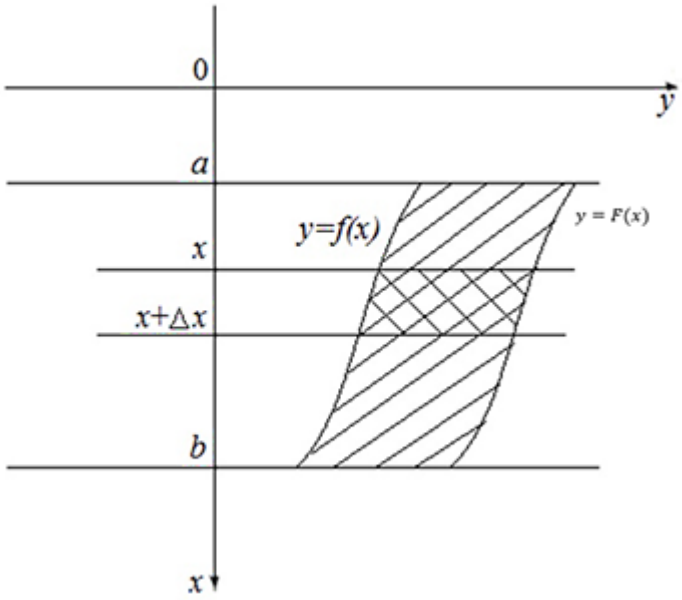


Рис. 24. Давление жидкости на вертикальную пластину

Воспользуемся схемой дифференциалов.

1. Пластина расположена вертикально. Давление на различные точки зависит от глубины, на которой находится точка. Следовательно, давление $P = P(x)$, где $x \in [a; b]$.

2. Зафиксируем произвольное $x \in [a; b]$, дадим ему приращение Δx и выделим частичную пластинку, ограниченную: прямыми $x = x$ и $x = x + \Delta x$, кривыми $y = f(x)$ и $y = F(x)$. На рисунке это полоса шириной Δx.

Сделаем допущение, что давление во всех точках пластины совпадает с его значением на глубине x.

© Алтайский государственный педагогический университет, 2021

При переходе от x до $x + \Delta x$ давление P получает приращение ΔP.

По закону Паскаля $\Delta P = g\rho(F(x) - f(x))\Delta x.$

3. Запишем выражение для дифференциала $dP = g\rho(F(x) - f(x))dx.$

4. Тогда давление жидкости на вертикальную пластину будет выражаться формулой:

$$P = g\rho \int_a^b (F(x) - f(x))dx.$$

Пример. Найдем силу давления P, испытываемую полукругом, опущенным в воду вертикально так, что его диаметр находится на поверхности воды.

Решение. Поскольку круг симметричен относительно вертикального диаметра, достаточно вычислить давление на четвертую часть круга и затем удвоить найденное значение.

Направим ось Ox вертикально вниз, а ось Oy горизонтально по поверхности воды вправо (рис. 25).

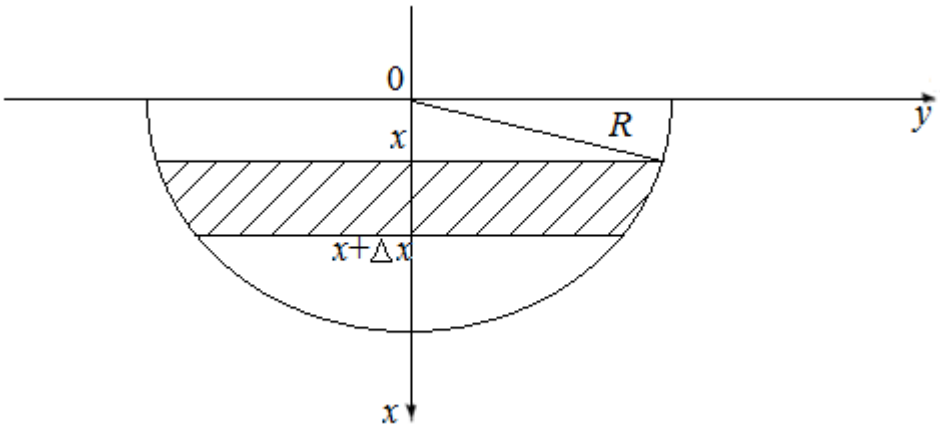


Рис. 25. Давление жидкости на полукруг

Уравнение четверти полуокружности $y = \sqrt{R^2 - x^2}, x \in [0, R].$

Выделим полосу полукруга на глубине x и высотой R. Вычислим давление на заштрихованную полоску, предположив, что высота столба жидкости

$\Delta P = 2gp\sqrt{R^2 - x^2}x\Delta x.$ Тогда дифференциал $dP = 2g\rho\sqrt{R^2 - x^2}xdx.$

Итак, $P = 2g\rho \int \sqrt{R^2 - x^2}\, xdx = \frac{2}{3} g\rho R^3.$

© Алтайский государственный педагогический университет, 2021

3.5. Кинетическая энергия тела

Как известно, кинетическая энергия К материальной точки с массой m и скоростью v вычисляется по формуле $K = \frac{1}{2}mv^2$.

Тогда система материальных точек с массами m_1, m_2, …, m_n и скоростями соответственно v_1, v_2, …, v_n будет равна сумме $K = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2} m_i v_i^2$.

Для вычисления кинетической энергии материального тела разобьем его на материальные частицы достаточно малой массы, которые будут выполнять роль материальной точки. Затем вычислим кинетические энергии этих частиц, просуммируем, перейдем к пределу при условии, что диаметр разбиения стремится к нулю, и получим соответствующий интеграл.

Пример. Вычислим кинетическую энергию однородного кругового цилиндра с радиусом основания R, высотой H, плотностью ρ, вращающегося с угловой скоростью w вокруг своей оси (рис. 26).

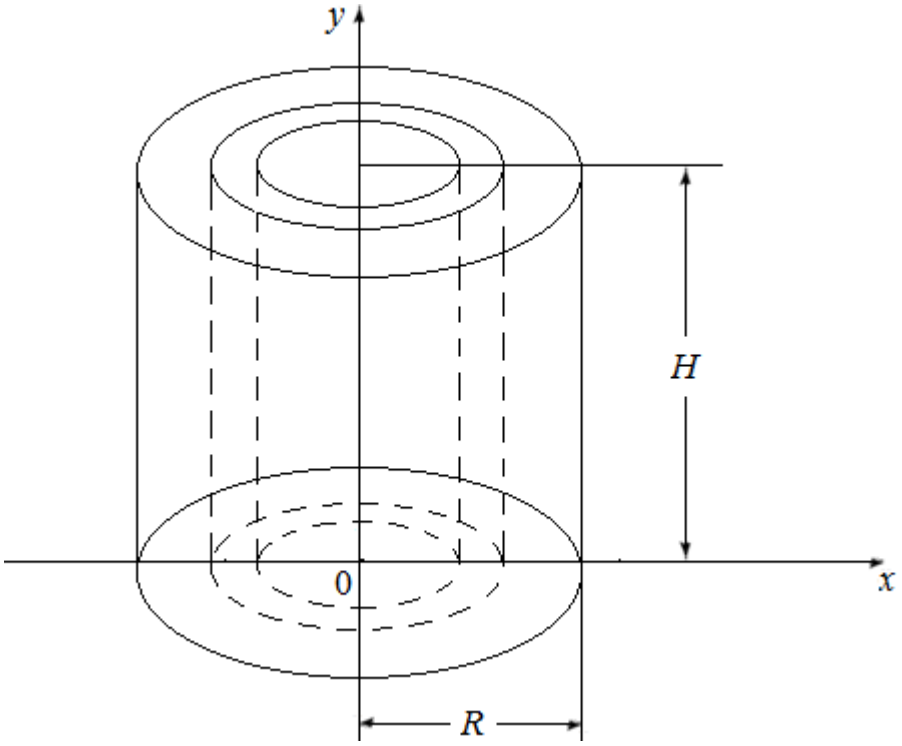


Рис. 26. Кинетическая энергия однородного цилиндра

© Алтайский государственный педагогический университет, 2021

В качестве элементарной частицы выберем полый цилиндр с высотой h, внутренним радиусом основания r, внешним $r + \Delta r$, иначе говоря, толщиной Δr. Найдем массу выделенного элемента Δm :

$$\Delta m = \pi\rho\Delta r((r+\Delta r)^2 - r^2)H = 2\rho\pi r\Delta rH + \rho\pi(\Delta r)2H.$$

Отбросив в правой части второе слагаемое, являющееся бесконечно малой более высокого порядка по сравнению с первым, получаем следующее приближенное значение массы:

$$\Delta m \approx 2\rho\pi rH\Delta r.$$

В силу того, что линейная скорость вращения массы Δm равна $v = rw$, где r есть расстояние от оси вращения, а $w -$ угловая скорость, кинетическая энергия выделенного элемента будет равна $\Delta K = \frac{1}{2}v^2\Delta m = \rho\pi w^2 r^3 H\Delta r$, а $dK = \rho\pi w^2 r^3 H\Delta r$.

Учитывая, что r внутри цилиндра изменяется от 0 до R, получаем интегрированием $K = \pi w^2 H\rho\int_0^R r^3 dr = \frac{1}{4}\pi w^3 H\rho R^4$.

© Алтайский государственный педагогический университет, 2021

3.6. Количество электричества

Допустим, что по проводнику течет ток переменной силы $I = I(t)$. Тогда количество электричества ΔQ, протекающее по проводнику за промежуток времени от t до $t + \Delta t$, будет равно $\Delta Q = I(t)\,\Delta t$ (допускаем, что сила тока за промежуток времени Δt остается постоянной, равной значению в момент t), откуда вытекает $dQ = I(t)\,dt$. Следовательно, для вычисления количества электричества, протекающего по проводнику за промежуток времени от t_1 до t_2 ($t_1 < t_2$), получаем формулу

$$Q = \int_{t1}^{t2} I(t)dt.$$

Пример. Пусть сила тока в проводнике переменна и выражается по формуле $I = 3t^2 + 2$.

Определить количество электричества, протекшего по проводнику за промежуток времени от $t = 2$ с. до $t = 5$ с.

Решение. Воспользуемся полученной формулой:

$$Q = \int_2^5 (3t^2 + 2)dt = (t^3 + 2t)|_2^5 = 123.$$

© Алтайский государственный педагогический университет, 2021

3.7. Статический момент и центр масс

3.7.1. Статический момент материальной точки

3.7.2. Статические моменты системы материальных точек

3.7.3. Центр масс системы материальных точек

3.7.4. Центр масс плоской кривой

3.7.5. Статический момент и центр масс плоской фигуры

© Алтайский государственный педагогический университет, 2021

3.7.1. Статический момент материальной точки

Пусть на плоскости xOy задана точка $A(x, y)$ массы m. Из механики известно, что статический момент точки относительно оси равен произведению массы точки на расстояние точки от оси (рис. 27).

При этом для точек, лежащих по одну сторону от оси, расстоянию приписывается знак «+», по другую – знак «–».

Таким образом, статические моменты точки $A(x, y)$ относительно оси Ox и Oy соответственно равны $M_x = my, M_y = mx$.

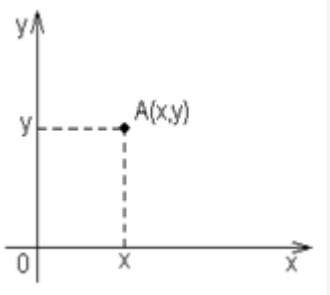


Рис. 27. Статические моменты точки

© Алтайский государственный педагогический университет, 2021

3.7.2. Статические моменты системы материальных точек

Пусть имеется система материальных точек $A_1(x_1,y_1), A_2(x_2,y_2), \dots, A_n(x_n,y_n)$ соответственно с массами $m_1, m_2, \dots, m_n$.

Статическим моментом системы материальных точек относительно некоторой оси называют сумму статических моментов всех ее точек относительно этой оси. В плоскости *x*O*y* моменты системы точек будут равны $M_x = \sum_{k=1}^{n} m_k y_k, M_y = \sum_{k=1}^{n} m_k x_k.$

© Алтайский государственный педагогический университет, 2021

3.7.3. Центр масс системы материальных точек

В механике центр масс системы материальных точек $A_1(x_1,y_1), A_2(x_2,y_2), \dots, A_n(x_n,y_n)$ с массами соответственно $m_1, m_2, \dots, m_n$ определяется как такая точка *C,* что если в ней сосредоточить массы всех точек, то ее статический момент относительно любой оси будет равен статическому моменту системы точек.

Обозначим координаты точки $C(x_c,y_c)$. Тогда

$$x_c \sum_{k=1}^{n} m_k = \sum_{k=1}^{n} m_k x_k, y_c \sum_{k=1}^{n} m_k = \sum_{k=1}^{n} m_k y_k.$$

Откуда $x_c = \frac{\sum_{k=1}^{n} m_k x_k}{\sum_{k=1}^{n} m_k}, y_c = \frac{\sum_{k=1}^{n} m_k y_k}{\sum_{k=1}^{n} m_k}$ или $x_c = \frac{M_y}{\sum_{k=1}^{n} m_k}, y_c = \frac{M_x}{\sum_{k=1}^{n} m_k}$.

© Алтайский государственный педагогический университет, 2021

3.7.4. Центр масс плоской кривой

Пусть теперь система материальных точек заполняет плоскую кривую AB.

Допустим, что кривая задана параметрически $\begin{cases} x = \varphi(l) \\ y = \psi(l) \end{cases}, 0 \le l \le L$, где параметром является длина дуги кривой, отсчитываемая от начала дуги точки A до переменной точки $M(x, y)$, а L обозначает длину всей кривой.

Будем считать, что кривая однородна, то есть вдоль кривой непрерывно распределена масса так, что ее линейная плотность ρ постоянна. Вычислим статические моменты M_x и M_y кривой AB относительно осей Оx и Оy.

Разделим дугу AB на n частей точками $A, A_1(x_1, y_1), A_2(x_2, y_2), \dots, A_n(x_n, y_n) = B$ (рис. 28).

Пусть этим точкам соответствуют значения параметра: $l_0 < l_1 < l_2 < \dots < l_n = L$.

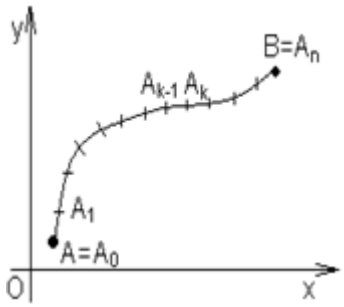


Рис. 28. Кривая, разбитая на частичные дуги

Обозначим длину дуги $A_{k-1}A_k$ через $\Delta l_k = l_k - l_{k-1}$, а массу ее через m_k, тогда $m_k = \rho \Delta l_k$. При мелком разбиении дуги можно считать, что масса k-й дуги сосредоточена в какой-то одной ее точке, например $A(x_k, y_k)$. Тогда вся кривая заменится системой точек $A_1, A_2, \dots, A_n$ (1).

Статический момент M_x кривой будет приближенно равен статическому моменту системы точек (1) относительно Оx.

$$M_x \approx \sum_{k=1}^{n} m_k y_k = \sum_{k=1}^{n} \rho y_k \Delta l_k = \rho \sum_{k=1}^{n} y_k \Delta l_k \text{ (2).}$$

Приближенное равенство будет тем точнее, чем мельче дробление дуги AB, то есть чем меньше диаметр разбиения $d = \max \Delta l_k$.

© Алтайский государственный педагогический университет, 2021

Поэтому статический момент дуги M_x определяют как предел $M_x = \lim\limits_{d\to 0} \rho \sum\limits_{k=1}^{n} y_k \Delta l_k$.

$\sum\limits_{k=1}^{n} y_k \Delta l_k$ интегральная сумма для непрерывной функции $y = \psi(l)$ на отрезке $[0, L]$.

$\lim\limits_{d\to 0} \rho \sum\limits_{k=1}^{n} y_k \Delta l_k$существует и равен $\int_0^L y dl$.

Поэтому $M_x = \rho \int_0^L y dl$(3).

Аналогично рассуждая, получаем $M_y = \rho \int_0^L x dl$ (4).

Найдем координаты центра масс дуги *AB*.

Так как масса дуги *AB* равна $m = \rho l$, то

$$x_c = \frac{M_y}{m} = \frac{\rho \int_0^L x dl}{\rho L} = \frac{\int_0^L x dl}{L} \text{ (5).}$$

$$y_c = \frac{M_x}{m} = \frac{\rho \int_0^L y dl}{\rho L} = \frac{\int_0^L y dl}{L} \text{ (6).}$$

Замечания.

1. Если кривая не однородна, то есть $\rho = \rho(l)$, то $x_c = \frac{\int_0^L \rho(l) dl}{m}, y_c = \frac{\int_0^L \rho(l) dl}{m}$.

2. Если кривая симметрична относительно какой-либо оси, то ее центр масс лежит на этой оси.

3. Если кривая *AB* задана явным уравнением $y = f(x)$, $a \le x \le b$, то дифференциал дуги $dl = \sqrt{1 + (y'_x)^2}\, dx$ и формулы примут вид $x_c = \frac{\int_a^b x\sqrt{1 + (y'_x)^2}\, dx}{L}$, $y_c = \frac{\int_a^b y\sqrt{1 + (y'_x)^2}\, dx}{L}$.

© Алтайский государственный педагогический университет, 2021

Пример. Найдем центр масс дуги окружности $x^2+y^2=r^2$, лежащей в первой четверти.

Разрешим уравнение окружности относительно $y=\sqrt{r^2-x^2}, 0\le x\le r$, $y'_x=\frac{-x}{\sqrt{r^2-x^2}}$.

$$x_c=\frac{\int_0^r x\sqrt{1+\frac{x^2}{r^2-x^2}}\,dx}{\frac{2\pi r}{4}}=\frac{\int_0^r \frac{xr}{\sqrt{r^2-x^2}}\,dx}{\frac{\pi r}{2}}=\frac{1}{\pi}\int_0^r\frac{dx^2}{\sqrt{r^2-x^2}}=$$

$$=-\frac{1}{\pi}\int_0^r (r^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}d(r^2-x^2)=$$

$$=-\frac{2}{\pi}(r^2-x^2)^{\frac{1}{2}}|_0^r=\frac{2}{\pi}r.$$

Аналогично $y_c=\frac{2}{\pi r}\int_0^r (r^2-x^2)^{\frac{1}{2}}\frac{r}{r^2-x^2}\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^r dx=\frac{2r}{\pi}$.

© Алтайский государственный педагогический университет, 2021

3.7.5. Статический момент и центр масс плоской фигуры

Пусть на плоскости задана плоская фигура, ограниченная кривыми $y = f(x)$ и $y = g(x)$ и отрезками прямых $x = a$ и $x = b$ (рис. 29).

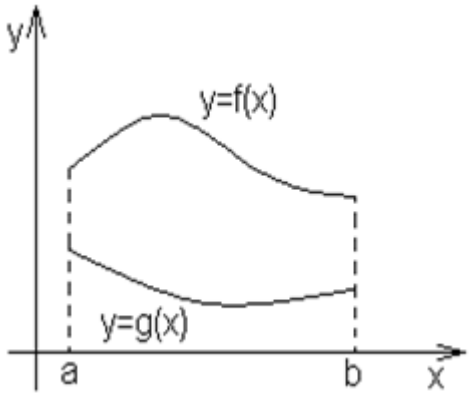


Рис. 29. Плоская фигура

Если плотность распределения массы постоянна: $\rho - const$,

$x_c = \frac{\int_a^b x\left(f(x) - g(x)\right)dx}{S}, y_c = \frac{\int_a^b x\left(f^2(x) - g^2(x)\right)dx}{S}$, где S– площадь фигуры.

Задание. *Изучить самостоятельно: Бохан К.А., Егорова И.А., Лащенов К.В. Курс математического анализа (т. 1, глава X, параграф 6, пункт 2, с. 445–447).*

© Алтайский государственный педагогический университет, 2021

3.8. Момент инерции

Момент инерции является характеристикой вращательного движения тела вокруг некоторой оси. Момент инерции I материальной точки M с массой m, находящейся на расстоянии r от оси вращения, выражается формулой $I = mr^2$ (рис. 30).

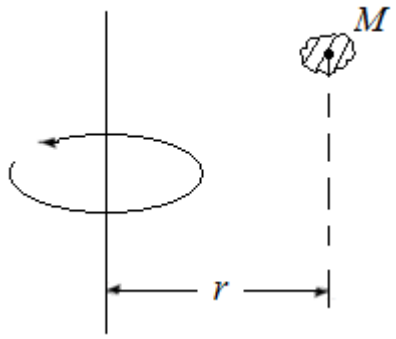


Рис. 30. Момент инерции материальной точки

Момент инерции системы материальных точек с массами m_1, m_2, …, m_n, находящихся на расстоянии от оси вращения соответственно r_1, r_2, …, r_n, вычисляется по формуле $\sum_1^n m_i r_i^2$ (как видим, момент инерции есть величина аддитивная).

Для нахождения момента инерции материальной кривой, плоской области, их необходимо разбить на достаточно мелкие частичные области, достаточно малые по массе. Делается это для того, чтобы эту частичную область можно было считать материальной точкой.

3.8.1. Момент инерции дуги материальной кривой

3.8.2. Момент инерции плоской материальной фигуры

© Алтайский государственный педагогический университет, 2021

3.8.1. Момент инерции дуги материальной кривой

Найдем момент инерции дуги непрерывной однородной материальной кривой $y = f(x)$, $a \le x \le b$ относительно оси Oy (рис. 31).

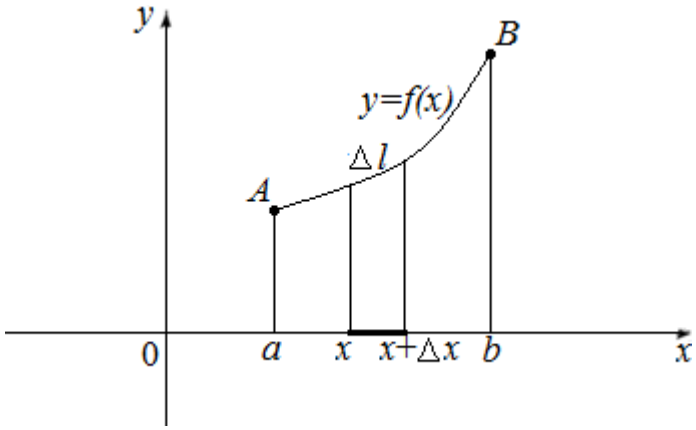


Рис. 31. Момент инерции дуги

На отрезке $[a, b]$ выберем произвольно точку x и дадим ей приращение Δx. Бесконечно малому отрезку $[x, x + \Delta x]$ будет соответствовать Δl – частичный элемент дуги AB. Масса Δm этого элемента дуги будет равна $\Delta m = \rho\, \Delta l$ (в силу однородности материла плотность ρ постоянна). С точностью до бесконечно малой $\Delta m \approx dm = \rho\ dl = \rho\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx$. Тогда элементарный элемент инерции выделенного элемента дуги Δl будет равен

$$\Delta I = dI = \rho x^2 \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx.$$

Для нахождения момента инерции дуги AB, соответствующей отрезку $[a, b]$, остается по дифференциалу dl восстановить $I = \int_a^b dl$.

Итак, получаем формулу для нахождения момента инерции дуги материальной однородной кривой.

$$I = \int_a^b \rho x^2 \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx.$$

Пример. Найдем момент инерции отрезка $[A, B]$, длина которого равна l, относительно оси, лежащей с ним в одной плоскости, зная, что конец отрезка A отстоит от оси вращения на расстояние a, а конец B – на расстояние b (рис. 32).

© Алтайский государственный педагогический университет, 2021

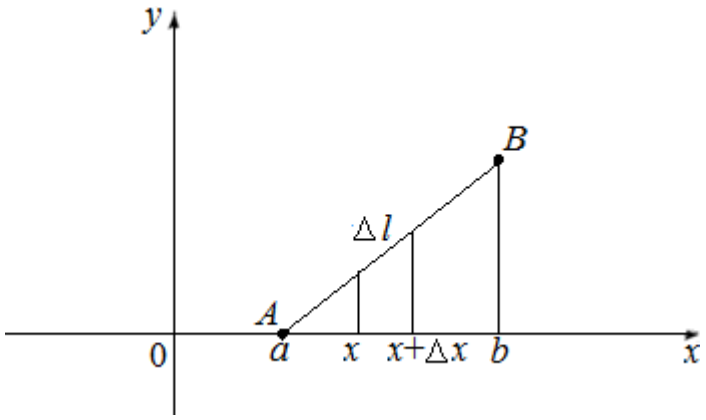


Рис. 32. Момент инерции отрезка

В качестве оси вращения выберем ось Oy. Точку A отрезка поместим на ось Ox. В силу того, что эта точка отстоит от оси вращения на расстояние a, ее координаты A (a, 0). Точка B отстоит от оси вращения (оси Oy) на расстояние b, следовательно, ее абсцисса есть b. Ординату y этой точки найдем по теореме Пифагора из треугольника ABb $y = \sqrt{l^2 - (b-a)^2}$.

Составим уравнение прямой, проходящей через две точки A и B, получим: $y = \sqrt{l^2 - (b-a)^2} \cdot \dfrac{(x-a)}{b-a}$.

Выберем на отрезке [a, b] произвольную точку x, дадим ей приращение Δx. Элементарному отрезку [x, $x + \Delta x$] оси Ox соответствует элементарный участок на отрезке AB длиной Δl. Найдем элемент массы этого элементарного участка $\Delta m = \rho \Delta l$. Тогда момент инерции участка $\Delta I = x^2 \Delta m = \rho x^2 \Delta l$.

Найдем $dl = \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\,dx = \dfrac{l}{b-a}dx$. Для вычисления момента инерции отрезка остается вычислить интеграл $I = \int_a^b dl$. Итак, $I = \int_a^b \rho \dfrac{1}{b-a} x^2 dx$.

© Алтайский государственный педагогический университет, 2021

3.8.2. Момент инерции плоской материальной фигуры

Пусть задана плоская материальная фигура с плотностью ρ, ограниченная внизу дугой кривой $y = f(x)$, сверху – кривой $y = g(x)$, слева и справа – отрезками прямых $x = a$ и $x = b$ (рис. 33).

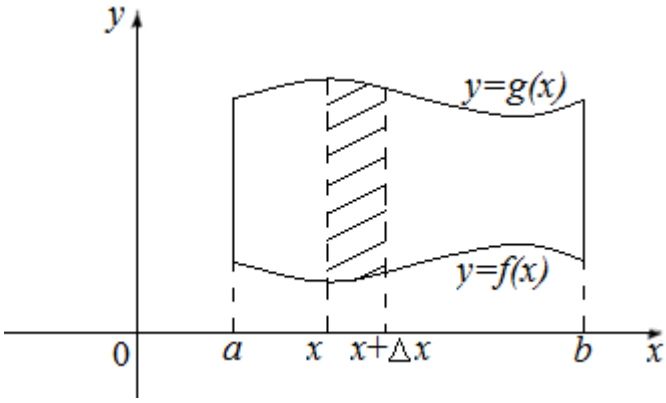


Рис. 33. Момент инерции плоской фигуры

Пусть функции f и g непрерывны на отрезке $[a, b]$, а плотность материала постоянна. Вычислим момент инерции данной фигуры.

Выберем на отрезке $[a, b]$ произвольно точку x, дадим ей приращение Δx такое, что $x + \Delta x \in [a, b]$. Выделенному отрезку $[x, x + \Delta x]$ соответствует заштрихованный элемент плоской материальной фигуры, ее площадь равна $\Delta s = (g(x) - f(x))\,\Delta x$.

Тогда элемент массы $\Delta m = \rho\big(g(x) - f(x)\big)\Delta x$. Допустим, что все точки выделенного плоского элемента находятся на расстоянии x от оси вращения. Получим, что момент инерции выделенного элемента $\Delta I = \rho\big(g(x) - f(x)\big)x^2\Delta x$. Заменив ΔI на его дифференциал с точностью до бесконечно малого более высокого порядка малости, получим равенство $\Delta I = dI = \rho\big(g(x) - f(x)\big)x^2 dx$. А момент инерции можно найти по формуле $I = \int_a^b \rho\big(g(x) - f(x)\big)x^2 dx$.

Пример. Найти момент инерции равнобедренного треугольника с основанием a и высотой h относительно основания.

Решение. Для удобства рассуждений расположим заданный треугольник следующим образом: вершину треугольника поместим в точку $(h, 0)$. Основание попадет на ось Oy, концы основания будут симметричны относительно начала координат (рис. 34).

© Алтайский государственный педагогический университет, 2021

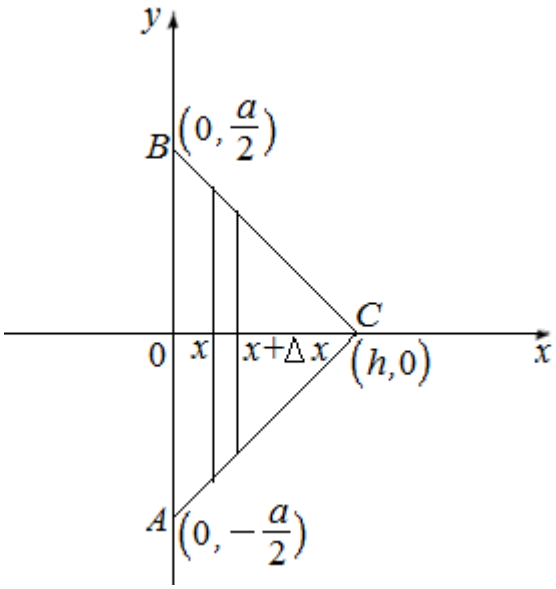


Рис. 34. Момент инерции треугольника

Составим уравнения сторон треугольника, воспользовавшись уравнением прямой, проходящей через две точки. Сторона BC проходит через точки B$\left(0, \frac{1}{2}a\right)$, C ($h$, 0): $\frac{y-\frac{1}{2a}}{0-\frac{1}{2a}} = \frac{x-0}{h-0}$ или $y = -\frac{ax}{2h} + \frac{a}{2}$. Сторона AC проходит через точки A $\left(0, -\frac{a}{2}\right)$, C ($h$, 0). Ее уравнение: $y = \frac{ax}{2h} - \frac{a}{2}$.

На отрезке [0, h] оси Ox выберем произвольно точку x, дадим ей приращение Δx ($x + \Delta x \in [a,b]$). Через точки Δx и $x + \Delta x$ проведем прямые, параллельные оси ординат, они вырежут из треугольника заштрихованную полоску – элемент площадью Δs, равную $\Delta s = ((g(x) - f(x))\,\Delta x$, где $g(x)$ – ордината точки, лежащей на стороне BC, а $f(x)$ – ордината точки на стороне AC, взятые в точке x. Здесь сделано первое допущение – трапеция заменена прямоугольником со сторонами $(g(x) - f(x))$ и Δx. Тогда масса выделенного элемента будет равна $\Delta m = \rho\,(g(x) - f(x))\,\Delta x$, а элемент инерции

$$\Delta I = \rho\,(g(x) - f(x))x^2\,\Delta x = \rho\left(\left(-\frac{ax}{2h} + \frac{a}{2}\right) - \left(\frac{ax}{2h} - \frac{a}{2}\right)\right)x^2\,\Delta x = \rho\left(-\frac{ax}{h} + a\right)x^2\,\Delta x.$$

Заменив ΔI на dI, с точностью до бесконечно малого слагаемого получаем: $dI = \rho\left(-\frac{ax}{h} + a\right)x^2\,\Delta x.$

© Алтайский государственный педагогический университет, 2021

Для нахождения момента инерции остается взять интеграл от дифференциала в пределах изменения переменной x от 0 до h.

$$I = \int_0^h \rho\left(-\frac{ax}{h} + a\right)x^2 dx = \rho \cdot \frac{-a}{h}\int_0^h x^3 dx + a\int_0^h x^2 dx = \frac{1}{12}\rho a h^3.$$

© Алтайский государственный педагогический университет, 2021

Задания для самоконтроля

1. Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла.

2. Понятие определенного интеграла. Символическая запись, терминология.

3. Схемы применения определенного интеграла. Схема элементов.

4. Схемы применения определенного интеграла. Дифференциальная схема.

5. В чем сходство и различие схемы элементов и схемы дифференциалов.

6. Вычисление работы переменной силы с помощью определенного интеграла.

7. Вычисление давления жидкости на вертикальную пластину. Поясните использование одной из схем.

8. Вычисление кинетической энергии тела с помощью определенного интеграла. Поясните использование схемы дифференциалов.

9. Вычисление количества электричества. Поясните использование одной из схем.

10. Вычисление статических моментов материальных кривых.

11. Вычисление координат центров масс плоских фигур с помощью определенного интеграла.

© Алтайский государственный педагогический университет, 2021

Глава 4. Приложения определенного интеграла в биологии, медицине и экономике

4.1. Приложения определенного интеграла в биологии

4.1.1. Численность популяции

4.1.2. Биомасса популяции

4.1.3. Средняя длина пролета

4.2. Интегральное исчисление в медицине

4.3. Интегральное исчисление в экономике и финансах

4.3.1. Экономический смысл определенного интеграла

4.3.2. Нахождение объема выпущенной продукции по известной функции производительности труда

4.3.3. Нахождение экономических функций по известным предельным значениям

4.3.4. Производственная функция Кобба – Дугласа

4.3.5. Среднее время изготовления изделия

4.3.6. Количество денег, поступающих в банк за определенный промежуток времени

4.3.7. Дисконтированная стоимость денежного потока

Задания для самоконтроля

© Алтайский государственный педагогический университет, 2021

4.1. Приложения определенного интеграла в биологии

Математика возникла в недрах физики и развивалась в целях получения средств решения многих физических, механических задач. Постепенно область применения математических знаний и методов расширялась, и математика превратилась в мощное орудие развития различных разделов научных исследований. Выдающиеся ученые: итальянский физик и астроном Галилео Галилей (1564–1642 гг.), родоначальник немецкой классической философии Иммануил Кант (1742–1804 гг.), немецкий математик Давид Гильберт (1862–1943 гг.) – еще несколько веков назад в различных формах выражали глобальную мысль, раскрывающую суть зарождающейся математизации современного знания, подчеркивая, что математика становится основой научных знаний, в том числе научного естествознания. Леонардо да Винчи, пытаясь дать математическое обоснование законов природы, считал математику важным средством познания, он использовал ее методы в анатомии.

В настоящей главе раскроем использование аппарата интегрального исчисления как средства решения различных задач биологии, медицины, экономики в настоящее время.

4.1.1. Численность популяции

4.1.2. Биомасса популяции

4.1.3. Средняя длина пролета

© Алтайский государственный педагогический университет, 2021

4.1.1. Численность популяции

Численность популяции (число особей в популяции) с течением времени меняется, при благоприятных условиях существования рождаемость превышает смертность и общее число особей в популяции увеличивается, при неблагоприятных – уменьшается. Скоростью роста популяции называется прирост числа особей популяции в единицу времени. Обозначается скорость роста популяций $v(t)$. В популяциях, давно обитающих в данной местности, так называемых старых, или установившихся, популяциях, скорость роста $v(t)$ достаточно мала и постоянно уменьшается с течением времени, стремясь к нулю. Но если популяция достаточно молода, а ее отношения с другими популяциями, бытующими в данной местности, не являются устоявшимися, или на равновесие взаимоотношений влияют какие-либо внешние причины (природные катаклизмы или преднамеренное вмешательство человека), то скорость $v(t)$ может колебаться, причем значительно, то возрастая, то уменьшаясь.

Поскольку скорость роста популяции характеризует изменение численности популяции $N(t)$ в момент времени t, то $v(t) = N'(t)$. Тогда по известной скорости роста популяции можно найти численность популяции в момент времени t и прирост численности особей за промежуток времени от t_0 до T. Для этого нужно по скорости $v = v(t)$ найти ее первообразную $N(t)$ путем интегрирования функции $v(t)$ на отрезке $[t_0, T]$. Следовательно, прирост популяции от момента t_0 до момента T будет вычисляться по формуле $N(T) - N(t_0) = \int_{t_0}^{T} v(t)dt$ (4.1).

Как известно, в условиях неограниченных ресурсов питания скорость роста многих популяций может происходить по экспоненте, т. е. $v(t) = a\,e^{kt}$.

Популяция в этом случае как бы не стареет. Такие условия можно создать, например, для развивающихся микроорганизмов, пересаживая периодически развивающуюся культуру в новые емкости с питательной средой.

Применяя выведенную формулу (4.1) для этого случая, получим: $N(T) - N(t_0) = \int_{t_0}^{T} ae^{kt}dt = \frac{a}{k} \cdot (e^{kT} - e^{kt_0})$ (4.2).

По формуле, подобной (4.2), подсчитывается численность культивируемых плесневых грибков, выделяющих пенициллин.

Пример. Рассмотрим микробиологическую задачу. Установим закон изменения с течением времени численности бактерий, помещенных в питательную среду.

© Алтайский государственный педагогический университет, 2021

Составим дифференциальное уравнение, описывающее существование бактерий в указанных условиях. Для этого учтем, что скорость размножения бактерий математически есть производная $\frac{dn}{dt}$ от численности популяции по времени t и что она пропорциональна численности популяции в момент t. Следовательно, необходимое уравнение будет иметь вид:

$\frac{dn}{dt} = kn$, где k – доступный экспериментальному определению коэффициент, зависящий от вида бактерий и параметров среды обитания. Дополнительные данные, необходимые для решения задачи, определяются начальными условиями: при $t = 0$, $n = n_0$, т. е. в начальный момент $t = 0$ количество бактерий считается равным n_0.

Для решения дифференциального уравнения разделим переменные и проинтегрируем:

$\int \frac{dn}{n} = \int kdt$, получим $\ln n = kt + lnC$.

Произвольную постоянную для удобства преобразований представили в виде $\ln C$. откуда $n = Ce^{kt}$. При $t = 0$ $C = n_0$. Тогда $n = n_0 e^{kt}$ (4.3).

Итак, зная коэффициент k и начальное число бактерий, легко определить численность бактерий в любой момент времени t. С большим риском можно придать полученной формуле достаточно общее звучание: «Любой биологический вид, находящийся в оптимальных условиях существования, со временем экспоненциально увеличивает свою численность». Существуют примеры, подтверждающие справедливость этого утверждения. Так, кролики, завезенные в Австралию, где практически отсутствуют хищники, которые ими питаются, стали увеличивать свою численность в соответствии с формулой (4.5) и начали представлять угрозу для сельского хозяйства.

© Алтайский государственный педагогический университет, 2021

4.1.2. Биомасса популяции

Очень часто важно знать не только численность обитающей в определенной местности популяции, но и ее общую биомассу.

Будем рассматривать популяцию, в которой масса особей значительно меняется в течение жизни. Подсчитаем общую массу популяции. Обозначим через t возраст особи в тех или иных единицах времени, через $N(t)$ – число особей популяции, возраст которых равен t. Обозначим также через $P(t)$ среднюю массу особей возраста t, а через $M(t)$ – биомассу всех особей в возрасте от 0 до t. Заметим, что произведение $N(t) \cdot P(t)$ есть масса всех особей возраста от 0 до t. Найдем разность $M(t+\Delta t) - M(t) = N(t) \cdot P(t)\Delta t$ есть масса особей в возрасте от t до $t+\Delta t$. Она удовлетворяет неравенствам $N(t) \cdot P(t) \le M(t+\Delta t) - M(t) \le N(t) \cdot P(t)\Delta t$.

Тогда $\frac{M(t+\Delta t) - M(t)}{\Delta t} \le N(t) \cdot P(t)$.

Следовательно, $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{M(t+\Delta t) - M(t)}{\Delta t} = N(t) \cdot P(t)$ и биомасса $M(t)$ является первообразной функции $N(t) \cdot P(t)$. $\Delta t \to 0$.

Итак, $M(T) - M(0) = \int_0^T N(t)P(t)\,dt$ (4.4).

© Алтайский государственный педагогический университет, 2021

4.1.3. Средняя длина пролета

В ряде исследований, посвященных изучению миграции животных, бывает важно вычислять так называемую среднюю длину пробега, иначе говоря, среднюю длину пути при прохождении животным некоторого фиксированного участка. Опишем, как осуществляются соответствующие расчеты длин среднего пробега для перелетных птиц. Допустим, что радиус круга R невелик и птицы пересекают круг по прямой. Птица может пересекать окружность в любом месте и под любым углом. В этом случае путь, пройденный птицей по кругу, может быть равен любой величине в пределах от 0 до 2πR.

Определим среднюю длину пролета. В силу того, что круг симметричен относительно любого своего диаметра, можно допустить, что птицы летят в одном направлении, параллельно оси Oy, тогда средняя длина пролета – это среднее расстояние между дугами окружности, ограничивающими круг соответственно сверху и снизу. Иными словами, это среднее значение функции $\frac{f(x)-g(x)}{b-a}$, где f – функция, график которой ограничивает круг сверху, а g – функция, график которой ограничивает круг снизу. a, b – точки оси абсцисс, в которые проектируются левый и правый концы диаметра окружности.

Используя теорему о среднем, получаем $L = \int_a^b \frac{f(x)-g(x)}{b-a}dx$ (4.5).

Пространство пролета – круг, ограниченный окружностью. Обозначим координаты центра (x_0, y_0), запишем уравнение окружности, ограничивающей круг, $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$ или $(y-y_0)^2=R^2-(x-x_0)^2$. Тогда уравнение верхней дуги полуокружности есть $y=y_0+\sqrt{R^2-(x-x_0)^2}$, нижней – $y=y_0-\sqrt{R^2-(x-x_0)^2}$. Выразим пределы интегрирования в формуле (4.5) через абсциссы центра круга. Поскольку a – левый конец диаметра, то $a = x_0 - R$. Будучи правым концом диаметра, $b = x_0 + R$.

Итак, для средней длины пролета получаем выражение $L=\int_{x_0-R}^{x_0+R}\frac{\sqrt{R^2-(x-x_0)^2}}{R}dx$.

© Алтайский государственный педагогический университет, 2021

4.2. Интегральное исчисление в медицине

Современная медицина не может обходиться без математики. Математика необходима медику для понимания и грамотного использования современной аппаратуры, расшифровки результатов исследований.

Рассмотрим один из возможных примеров использования определенных интегралов при изучении гемодинамики движения крови по сосудам. Среди различных преимуществ эхокардиографического исследования (ЭхоКГ) целесообразно выделить возможность неинвазивно в реальном режиме времени оценить размеры и движение сердечных структур, получить характеристики внутрисердечной гемодинамики, определить давление в камерах сердца и легочной артерии. Теоретически и клинически доказана хорошая сопоставимость ЭхоКГ-исследования с данными, получаемыми при катетеризации сердца.

ЭхоКГ-исследование позволяет не только выявить наличие легочной гипертензии, но и исключить ряд заболеваний, которые являются причиной вторичной легочной гипертензии: пороки митрального клапана, врожденные пороки, хронический миокардит.

Для получения возможности использования интеграла сначала необходимо найти линейную скорость кровепотока. Кровепоток – это путь, пройденный в единицу времени частицей крови. Линейная скорость в различных сосудах различна и зависит от объемной скорости кровепотока, площади поперечного сечения сосуда. В практической медицине линейную скорость кровепотока измеряют с помощью ультразвукового и индикаторного методов. Чаще определяют время полного оборота, примерно равное 21–23 с. Для его определения в локтевую вену вводят индикатор (эритроциты, меченные радиоактивным изотопом, раствор метилового синего и др.) и отмечают время его первоначального появления в венозной крови этого же сосуда в другой конечности.

Мы уже рассматривали применение интеграла к вычислению различных физических величин. Понятие интеграла и возникло из потребностей ученых вычислять различные величины. Ярким примером таких задач является задача вычисления пути, пройденного материальной точкой, движущейся по прямой или криволинейной траектории, по известной скорости его движения. Те величины, которые в прикладных задачах вычисляются с помощью интегралов, называют интегральными, а те величины, через которые выражаются интегральные величины, – дифференциальными. Например, скорость тела – дифференциальная характеристика тела, а масса тела – его интегральная характеристика. Как правило, дифференциальные величины определяются значениями в точках, причем в различных точках они различны, т. е. эта зависимость является функциональной. Интегральная

© Алтайский государственный педагогический университет, 2021

характеристика определяет объект уже в области. Так, путь, пройденный точкой, – интегральная характеристика движущегося объекта не в каждой точке пути, а на всем пути (отрезке прямой или целом куске кривой). Следует отметить, что дифференциальная и интегральная характеристики не являются статичными в той области, в которой рассматриваются. Так, и скорость, и путь, пройденный точкой, изменяются в зависимости от времени.

После установления закона функциональной зависимости дифференциальной характеристики в той области, на которой изучается интегральная величина, появляется возможность осуществить последовательность преобразований дифференциальной характеристики (заранее установленных и обоснованных в интегральном исчислении) и перейти к интегральной характеристике той же области, на которой рассматривалась дифференциальная характеристика, и, наконец, вычислить значение интегральной величины.

Далее следует использование одной из известных схем применения определенного интеграла:

1. Разбиваем область существования вычисляемой величины произвольно на конечное число достаточно малых частей (отрезков, квадратиков, кубиков), внутри каждой из которых дифференциальную характеристику можно считать постоянной, равной значению в фиксированной точке. Например, когда говорим об объеме крови, протекающей через какое-то поперечное сечение сосуда, можем пренебречь размерами сосуда и считать всю массу крови, сосредоточенной в одной точке выделенного участка сосуда. Если используем определенный интеграл, дифференциальная функция должна быть функцией одного переменного.

2. Умножаем составленную дифференциальную характеристику на характеристику частичного участка разбиения (объем, площадь, длину отрезка). Полученные произведения складываем. В результате получаем интегральную сумму, составленную для дифференциальной функции, соответствующую выбранному разбиению области ее определения.

3. Переходим к пределу интегральной суммы, когда максимальная характеристика частичных участков разбиения стремится к нулю.

Интегральное исчисление дает красивый и очень короткий путь вычисления таких предельных переходов, суть которых сводится к вычислению интегральной величины, характеризующей кровепоток.

Итак, в основе функционирования аппаратуры, диагностирующей работу сердца, лежит использование интегрального исчисления для вычисления скорости кровепотока.

© Алтайский государственный педагогический университет, 2021

4.3. Интегральное исчисление в экономике и финансах

4.3.1. Экономический смысл определенного интеграла

4.3.2. Нахождение объема выпущенной продукции по известной функции производительности труда

4.3.3. Нахождение экономических функций по известным предельным значениям

4.3.4. Производственная функция Кобба – Дугласа

4.3.5. Среднее время изготовления изделия

4.3.6. Количество денег, поступающих в банк за определенный промежуток времени

4.3.7. Дисконтированная стоимость денежного потока

© Алтайский государственный педагогический университет, 2021

4.3.1. Экономический смысл определенного интеграла

Допустим, что функция $y = f(t)$ описывает изменение производительности некоторого производства с течением времени. Найдем объем продукции, произведенной за промежуток времени от 0 до T, т. е. на отрезке времени $[0, T]$. Разобьем отрезок $[0, T]$ произвольным образом на отрезки времени точками: $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = T$.

Объем продукции, произведенной в промежуток времени $[t_i; t_{i+1}]$, будет равен $\Delta y_i = f(\xi_i)\Delta t_i$.

Следовательно, объем продукции, произведенный за весь промежуток $[0, T]$, получим путем суммирования продукции, произведенной на частичных:

$$Y = \sum_{1}^{n} \Delta y_i = \sum_{1}^{n} f(\xi_i)\Delta y_i.$$

При стремлении $\max\Delta t$ к нулю каждое из полученных приближенных равенств становится все более точным, поэтому, учитывая определение определенного интеграла, получаем: объем выпущенной продукции за период времени T есть интеграл

$$Y = \int_0^T f(t)\,dt \quad (4.6),$$

где $f(t)$ – производительность труда в момент времени T.

© Алтайский государственный педагогический университет, 2021

4.3.2. Нахождение объема выпущенной продукции по известной функции производительности труда

Выясненный экономический смысл определенного интеграла выражает объем продукции, выпущенной в промежуток времени от $t = 0$ до $t = T$, по известной функции производительности труда формулой (4.6).

Рассмотрим примеры.

Пример 1. Найдем объем продукции, произведенной за 6 ч., если известна функция производительности труда: $f(t) = t^2 + 10t$ (ед/ч).

Решение. Обозначим объем произведенной продукции через Q. Согласно формуле (4.6), она будет равна определенному интегралу от функции, выражающей производительность труда от времени, т. е. под интеграл следует поставить функцию $f(t)$, а пределами интегрирования числа 0 и 6, выражающие начало и конец работы над изделиями. Итак, $Q = \int_0^6 (t^2 + 10t)dt = 180\ ед.$

Пример 2. Найдем дневную выработку в течение рабочего дня продолжительностью 8 часов, если производительность труда меняется в течение дня по формуле $f(t) = -0{,}2\,t^2 + 1{,}6\,t + 3$, где время выражается в часах.

Решение. $Q = \int_0^8 (-0{,}2t^2 + 1{,}6t + 3)dt$, где время выражается в часах.

Пример 3. Определим выработку рабочего:

а) за весь рабочий день (6 часов);

б) за третий час работы;

в) последний, шестой, час работы, если производительность труда выражается формулой $f(t) = -3\,t^2 + 18\,t$;

г) проведем экономический анализ задачи.

Решение:

1) найдем выработку рабочего за весь день, воспользовавшись формулой (4.6):

$$Q = \int_0^6 (-3t^2 + 18t)dt = (-t^3 + 9t^2)|_0^6 = 36 \cdot (-6 + 9) = 108\ (y.e.);$$

© Алтайский государственный педагогический университет, 2021

2) выработку рабочего за третий час работы вычисляем при помощи интеграла от функции – производительности труда, а пределами интегрирования будут числа: нижний – 2, верхний –3.

$$Q = \int_2^3 (-3t^2 + 18t)dt = (-t^3 + 9t^2)|_2^3 = 26\ (y.e.);$$

3) выработку рабочего за последний, шестой, час работы вычисляем при помощи интеграла от функции – производительности труда, а пределами интегрирования будут числа: нижний – 5, верхний – 6.

$$Q = \int_5^6 (-3t^2 + 18t)dt = (-t^3 + 9t^2)|_5^6 = 18\ (y.e.);$$

4) проанализируем результаты деятельности рабочего в течение дня. Если за третий час работы рабочим произведено 26, за шестой – 18, а за весь рабочий день – 108 единиц продукции, то, очевидно, следует сделать выводы: работа утомительна, требует большого напряжения сил и производительность уменьшается. Следовательно, нужно подумать о совершенствовании технологий производства, внедрении нового, более совершенного оборудования.

© Алтайский государственный педагогический университет, 2021

4.3.3. Нахождение экономических функций по известным предельным значениям

В микроэкономике рассматриваются так называемые предельные величины, т. е. для данной величины, представляемой некоторой функцией $y = f(x)$, $y' = f'(x)$. Поэтому часто приходится находить экономическую функцию (первообразную) по заданной функции предельных величин (производной).

Пример 4. Задана функция предельных издержек (издержки на производство дополнительной выпускаемой единицы продукции)

$C' = 2q^2 - 14q + 250$.

Найдем функцию издержек $C = C(q)$ и вычислим издержки на производство 15 единиц товара.

Решение. Функцию издержек будем находить интегрированием функции интегральных издержек:

$$C = \int_0^{15} (2q^2 - 14q + 250)dq = \left(\frac{2}{3}q^3 - 7q^2 + 250q\right)\Big|_0^{15} = 4425\ (y.e.).$$

© Алтайский государственный педагогический университет, 2021

4.3.4. Производственная функция Кобба – Дугласа

Наиболее важной производственной функцией является функция Кобба – Дугласа, которая выражает зависимость объема производства q от создающих его труда L и капитала K. Впервые производственная функция была рассчитана в 1920-е годы для обрабатывающей промышленности США в виде равенства $\ln(q) = \ln(1{,}01) + 0{,}73 \ln L + 0{,}27 \ln K$. Отсюда получаем $q(t) = 1{,}01L^{0{,}73} K^{0{,}27}$.

Обратим внимание на то, что сумма показателей у степеней с основаниями L и K равна 1. Общий вид функции Кобба – Дугласа запишем следующим образом: $q = A \cdot L^{\lambda} \cdot K^{1-\lambda}$, где A – технический коэффициент (4.7).

Если в функции Кобба – Дугласа считать, что затраты труда линейно зависят от времени, а затраты капитала неизменны, то формула примет вид:

$q(t) = (\alpha t + \beta) \cdot e^{\gamma t}$, где $q(t) = (\alpha t + \beta) \cdot e^{\gamma t}$.

Если $q(t)$ – годовой прирост производства продукции, то объем произведенной продукции за T лет составит:

$$Q = \int_0^T (\alpha t + \beta) \cdot e^{\gamma t} dt \quad (4.8).$$

Пример 5. Найдем объем продукции, выпущенной за 5 лет, если функция Кобба – Дугласа имеет вид $f(t) = (1+ t)e^{2t}$.

Решение. Функция затрат труда линейна относительно времени. Воспользуемся формулой (4.8) $Q = \int_0^5 (\alpha t + \beta) \cdot e^{\gamma t} dt$; получим $Q = \int_0^5 (1 + t) \cdot e^{2t} dt$.

Используем для вычисления интеграла метод интегрирования по частям. Пусть $u = 1 + t$, $du = dt$; $dv = e^{2t}dt$, $v = 1/2\ e^{2t}$. Тогда $Q = \frac{1}{2}\left(1 + t - \frac{1}{2}\right) \cdot e^{2t}\Big|_0^5$ (у. е.).

© Алтайский государственный педагогический университет, 2021

4.3.5. Среднее время изготовления изделия

Пусть известна функция $t = t(x)$, выражающая изменение затрат времени на изготовление изделия в зависимости от степени освоения производства, где x – порядковый номер изготавливаемого изделия партии.

Тогда среднее время изготовления $t_{ср}$, затраченное на изготовление одного изделия, в период освоения изделий от x_1 до x_2 вычисляется по теореме о среднем:

$t_{ср} = \frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} t(x)dx$ (4.9). Функция затрат времени на изготовление изделия часто имеет вид: $t = a\, x^{-b}$, где a – время, затрачиваемое на изготовление первого изделия, b – показатель производственного процесса.

© Алтайский государственный педагогический университет, 2021

4.3.6. Количество денег, поступающих в банк за определенный промежуток времени

Пусть процесс поступления денег в банк описывается функцией $y = f(t)$, где t – время, изменяющееся на отрезке $[0, T]$, а y – количество денег, поступивших в момент t. Поставим задачу определить сумму денег, поступившую в банк за период времени от 0 до T. Эта функция аддитивна. То есть, если промежуток разбит на непересекающиеся части, то поступление денег за весь промежуток будет равно сумме поступлений за каждый частичный промежуток.

Если функция f постоянна ($f(t) = a$, при $t \in [0, T]$), то количество денег, поступивших за промежуток от 0 до T, будет равно произведению $a(T - 0) = aT$.

Если же функция f не постоянна на $[0, T]$, то для вычисления всей суммы поступлений за указанный промежуток поступим следующим образом:

1. Промежуток $[0, T]$ разобьем произвольным образом на отрезки времени точками: $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_{k-1} < t_k \ldots < t_n = T$.

2. На каждом промежуточном отрезке $[t_{k-1}; t_k]$ выберем произвольно точку c_k и допустим, что во всех точках этого отрезка сумма поступлений равна $f(c_k)$.

3. Найдем сумму поступлений за промежуток $[t_{k-1}; t_k]$ $\Delta A_k \approx f(c_k)\Delta t_k$.

4. Тогда вся сумма денег, поступившая за промежуток времени $[0, T]$, будет выражаться следующим приближенным равенством: $A \approx \sum_{k=1}^{n} f(c_k) \cdot \Delta t_k$.

Точное значение A количества денег, поступивших банк, будет определено как

$$A \approx \lim_{\max \Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(c_k) \cdot \Delta t_k = \int_0^T f(t)dt \quad (4.10).$$

© Алтайский государственный педагогический университет, 2021

4.3.7. Дисконтированная стоимость денежного потока

Для определения эффективности капиталовложений часто пользуются дисконтированием. В задачу дисконтирования входит выяснение величины первоначально вложенного капитала K_0, чтобы при заданной процентной ставке по истечении t лет в банке оказался объем капитала $K(t)$.

Обозначим процентную ставку через p, сумму начального вклада – K_0.

Тогда, если проценты простые, прирост вклада за t лет составит $K_0\,pt$, а сумма вклада по истечении t лет будет вычисляться по формуле:

$K(t) = K_0(1 + pt)$ (4.11).

А дисконтированная сумма денежного потока, соответственно, по формуле:

$$К_0 = \frac{К(t)}{1 + pt} \text{ (4.12).}$$

При начислении сложных процентов конечная сумма капитала вычисляется по формуле $K(t) = K_0(1 + p)^t$, а дисконтированная – по формуле $К_0 = \frac{К(t)}{(1+p)t}$, где $t \in N$ (4.13).

При непрерывном начислении процентов конечная и дисконтированная суммы капитала вычисляются по формулам соответственно:

$К(t) = К_0 e^{pt}$ и $K_0 = K(t)e^{-pt}$ (4.14).

Предположим, что деньги вкладываются не разово в начальный момент времени, а поступают непрерывно и образует денежный поток, который выражается непрерывной функцией $K_0(t)$. Тогда, согласно формуле (4.10), общая сумма U_d вложений в банк за промежуток $[0; T]$ будет выражаться интегралом

$$U_D = \int_0^T K_0(t)dt = \int_0^T K(t)e^{-pt}dt \text{ (4.15).}$$

Здесь $K(t)$ – поступающий доход или скорость изменения поступающего денежного потока, а величина U_D называется дисконтированной стоимостью денежного потока.

© Алтайский государственный педагогический университет, 2021

Задания для самоконтроля

1. Какая схема применения определенного интеграла используется при выводе формулы численности популяции?

2. Опишите схему применения определенного интеграла для вычисления биомассы популяции.

3. Запишите формулу длины пролета и поясните способ применения.

4. Приведите пример использования определенного интеграла в аппаратах диагностики заболеваний.

5. Объясните прием использования определенного интеграла для вычисления объема выпущенной продукции

6. В чем заключается производственная функция Кобба – Дугласа и как она используется?

7. Что такое дисконтированная стоимость денежного потока и как она вычисляется?

© Алтайский государственный педагогический университет, 2021

2. ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАНЯТИЯ

Занятие № 1. Определенный интеграл. Понятие. Свойства. Вычисление

Занятие № 2. Определенный интеграл. Вычисление определенного интеграла с использованием формулы Ньютона – Лейбница, методов подстановки и по частям

Занятие № 3. Определенный интеграл. Вычисление с помощью определенного интеграла площадей плоских фигур и объемов тел вращения

Занятие № 4. Определенный интеграл. Вычисление с помощью определенного интеграла: длин дуг плоских кривых, площадей поверхностей пространственных фигур

Занятие № 5. Несобственные интегралы

© Алтайский государственный педагогический университет, 2021

Занятие № 1. Определенный интеграл. Понятие. Свойства. Вычисление

Тема «Определенный интеграл. Понятие. Свойства. Вычисление», 2 ч.

I. Повторить теорию

1. Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла.
2. Понятие определенного интеграла.
3. Условия существовании определенного интеграла (необходимое, необходимое и достаточное).
4. Свойства определенного интеграла: а) свойства, выражаемые равенствами; б) свойства, выражаемые неравенствами.
5. Формула Ньютона – Лейбница (знать с выводом, уметь пояснять ее применение).
6. Интегрирование подстановкой в определенном интеграле.
7. Интегрирование по частям в определенном интеграле.

II. Выполнить задания

1.1. Не вычисляя интегралы, используя свойства определенного интеграла:

1.1.1. Сравните интегралы:

1. $\int_0^1 x dx$ и $\int_0^1 x^2 dx$;
2. $\int_1^2 x dx$ и $\int_1^2 \frac{dx}{x}$;
3. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x dx$ и $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx$.

1.1.2. Оцените интегралы:

1. $\int_0^1 \sqrt{9+x^2} dx$;
2. $\int_0^1 x(1-x) dx$;
3. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x \, dx$.

© Алтайский государственный педагогический университет, 2021

1.2. Вычислите нижеследующие интегралы, используя формулу Ньютона – Лейбница и основные свойства определенного интеграла:

1. $\int_0^1 \sqrt{1+x}dx$;

2. $\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{(10-5x)^2}$;

3. $\int_2^{13} \frac{dx}{\sqrt{(3-x)^4}}$;

4. $\int_4^9 \frac{y-1}{\sqrt{y}+1}dy$;

5. $\int_6^{\frac{T}{2}} sin\left(\frac{2\pi t}{T}-\phi_0\right)dx$;

6. $\int_0^{16} \frac{dx}{\sqrt{x+9}-\sqrt{x}}$;

7. $\int_0^1 (e^x-1)^4 e^x dx$

8. $\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{1-(ln\,x)^2}}$;

9. $\int_1^e \frac{1+lg\,x}{x}dx$;

10. $\int_1^{e^2} \frac{dx}{x\sqrt{1+ln\,x}}$;

11. $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{x^3 dx}{\left(\frac{3}{8}-x^4\right)\sqrt{\frac{3}{8}-x^4}}$;

12. $\int_0^{\frac{a}{2}} \frac{adx}{(x-a)(x-2a)}$;

© Алтайский государственный педагогический университет, 2021

13. $\int_2^3 \frac{dx}{2x^2+3x-2}$;

14. $\int_0^1 \frac{dx}{x^2+4x+5}$;

15. $\int_1^3 \frac{dx}{x+x^2}$;

16. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x - \cos^3 x}\, dx$;

17. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^3 x}{\sqrt[3]{\sin x}} dx$.

Указание. Выполняя задания, выделить: 1) основные этапы вычисления интеграла, 2) используемые на каждом этапе свойства определенного интеграла.

III. Образцы решения

1. $\int_2^{-13} \frac{dx}{\sqrt[5]{(3-x)^4}} = -\int_{-13}^{2} (3-x)^{-\frac{4}{5}} dx = +\int_{-13}^{2} (3-x)^{-\frac{4}{5}} d(-x) =$

$$= \int_{-13}^{2} (3-x)^{-\frac{4}{5}} d(3-x) = \left.\frac{(3-x)^{-\frac{4}{5}+1}}{-\frac{4}{5}+1}\right|_{-13}^{2} =$$

$$= 5(3-2)^{1/5} - 5(3+13)^{1/5} = 5 - 5\sqrt[5]{16}.$$

2. $\int_1^{e^2} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}} \left\langle d\ln x = \frac{1}{x}dx \right\rangle = \int_1^{e^2} (1+\ln x)^{-\frac{1}{2}} d\ln x =$

$$= \int_1^{e^2} (1+\ln x)^{-\frac{1}{2}} d(1+\ln x) = \left.\frac{(1+\ln x)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right|_1^{e^2} =$$

$$= 2(1+\ln e^2)^{\frac{1}{2}} - 2 = 2\sqrt{1+2} - 2 = 2(\sqrt{3}-1).$$

© Алтайский государственный педагогический университет, 2021

3. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x - \cos^3 x}\, dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x\,(1-\cos^2 x)}\, dx =$

$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x \sin^2 x}\, dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \sqrt{\cos x \sin^2 x}\, dx +$

$+ \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x \sin^2 x}\, dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \sqrt{\cos x}\,(-\sin x)dx + \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x}\sin x\, dx =$

$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} (\cos x)^{\frac{1}{2}}\, d\cos x -$

$- \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^{\frac{1}{2}}\, d\cos x = \frac{(\cos x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{0} - \frac{(\cos x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}} =$

$= \frac{2}{3}\left(\cos 0 - \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) - \frac{2}{3}\left(\cos\frac{\pi}{2} - \cos 0\right) =$

$= \frac{2}{3} - \frac{2}{3}(0-1) = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{4}{3}.$

Рекомендованная литература

Берман Г. Сборник задач по курсу математического анализа. М., 2001 (глава «Определенный интеграл»).

© Алтайский государственный педагогический университет, 2021

Занятие № 2. Определенный интеграл. Вычисление определенного интеграла с использованием формулы Ньютона – Лейбница, методов подстановки и по частям

Тема «Определенный интеграл. Вычисление определенного интеграла с использованием формулы Ньютона – Лейбница, методов подстановки и по частям», 2 ч.

I. Повторить теорию

1. Интегрирование подстановкой в определенном интеграле.
2. Интегрирование по частям в определенном интеграле.

II. Решить

2.1. Интегрированием по частям найдите интегралы:

a) $\int_0^1 xe^{-x}dx$

b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx$

c) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{xdx}{\sin^2 x}$

d) $\int_1^2 x\log_2 x\,dx$

e) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\cos x\,dx$

2.2. Вычислите интегралы, используя метод замены переменной:

a) $\int_4^9 \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{x}-1}$

© Алтайский государственный педагогический университет, 2021

b) $\int_3^8 \frac{xdx}{\sqrt{1+x}}$

c) $\int_0^1 \frac{xdx}{1+\sqrt{x}}$

d) $\int_3^{29} \frac{\sqrt[3]{(x-2)^2}}{3+\sqrt[3]{(x-2)^2}}dx$

e) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} cos^7 2x dx$

III. Образцы решения

1. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{xdx}{sin^2 x} \left| \begin{matrix} u = x du = dx \\ dv = \frac{dx}{sin^2 x} v = \int \frac{dx}{sin^2 x} = -ctgx \end{matrix} \right| =$

$= -xctgx|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} (-ctgx)dx = -\frac{\pi}{3} ctg\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} ctg\frac{\pi}{4} + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x}{\sin x} dx =$

$= -\frac{\pi}{3}\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{\pi}{4} + ln(\sin x)|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = -\frac{\pi}{3\sqrt{3}} + \frac{\pi}{4} + ln\left(sin\frac{\pi}{3}\right) - ln\left(sin\frac{\pi}{4}\right).$

2. $\int_2^8 \frac{xdx}{\sqrt{1+x}} = \left| \begin{matrix} 1+x = t^2 \Rightarrow dx = 2tdt \\ x = 2 \Rightarrow t^2 = 3 \Rightarrow t = \sqrt{3} \\ x = 8 \Rightarrow t^2 = 9 \Rightarrow t = 3 \end{matrix} \right| = \int_{\sqrt{3}}^3 \frac{(t^2-1)2t}{t} dt =$

$= 2\int_{\sqrt{3}}^3 (t^2-1)dt = 2\frac{t^3}{3}\Big|_{\sqrt{3}}^3 - 2t|_{\sqrt{3}}^3 = \cdots$

Указание. Выполняя задания 1–2, выделить основные этапы вычисления интеграла, используемые на каждом этапе свойства определенного интеграла, особенности использования формулы интегрирования по частям или подстановкой.

Рекомендованная литература

Берман Г. Сборник задач по курсу математического анализа. М., 2001 (глава «Определенный интеграл»).

© Алтайский государственный педагогический университет, 2021

Занятие № 3. Определенный интеграл. Вычисление с помощью определенного интеграла площадей плоских фигур и объемов тел вращения

Тема «Определенный интеграл. Вычисление с помощью определенного интеграла площадей плоских фигур и объемов тел вращения», 2 ч.

I. Повторить теорию

1. Вычисление площади криволинейной трапеции.
2. Вычисление площадей плоских фигур в декартовых координатах.
3. Вычисление площади криволинейного сектора в полярных координатах.

II. Решить

3.1. Вычислите площади следующих плоских фигур:

3.1.1. Фигуры, ограниченной линиями, уравнения которых $y^2 = 2x + 1$ и $x - y - 1 = 0$;;

3.1.2. Круг $x^2 + y^2 \leq 8$разделен параболой $y = \frac{x^2}{2}$ на 2 части. Найти площади обеих частей;

3.1.3. Фигуры, ограниченной линиями, $y = x^2 - 2x - 3$ и $y = -x^2 + 6x - 3$;

3.1.4. Фигуры, ограниченной параболами, $y^2 + 8x = 16$ и $y^2 - 24x = 48$;

3.1.5. Одного из криволинейных треугольников, ограниченных осью абсцисс и линиями $y = sinx$ и $y = cosx$;

3.1.6. Плоской фигуры, заданной параметрически: $\begin{cases} x = acos^3 t, \\ y = asin^3 t; \end{cases}$

3.1.7. Фигуры, ограниченной кривой, заданной в полярных координатах $\rho = acos5\varphi$;

3.1.8. Фигуры, ограниченной линией $\rho = asin2\varphi$.

3.2. Вычислите объемы тел вращения:

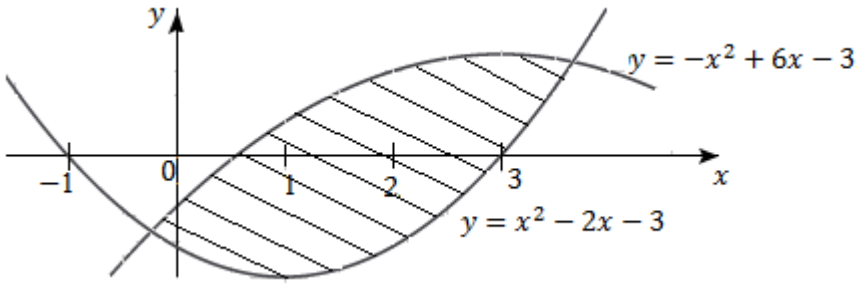
3.2.1. Тела, образованного параболой $y^2 = 4x$, вращающейся вокруг оси Ox;

3.2.2. Тела, образованного вращением плоской фигуры, ограниченной гиперболой $x^2 - y^2 = a^2$и прямой $x = a + h(h > 0)$, при ее вращении вокруг оси Ox.

© Алтайский государственный педагогический университет, 2021

III. Образцы решения

1. Фигура на плоскости ограничена параболами (1) $y = x^2 - 2x - 3$ и (2) $y = -x^2 + 6x - 3$.



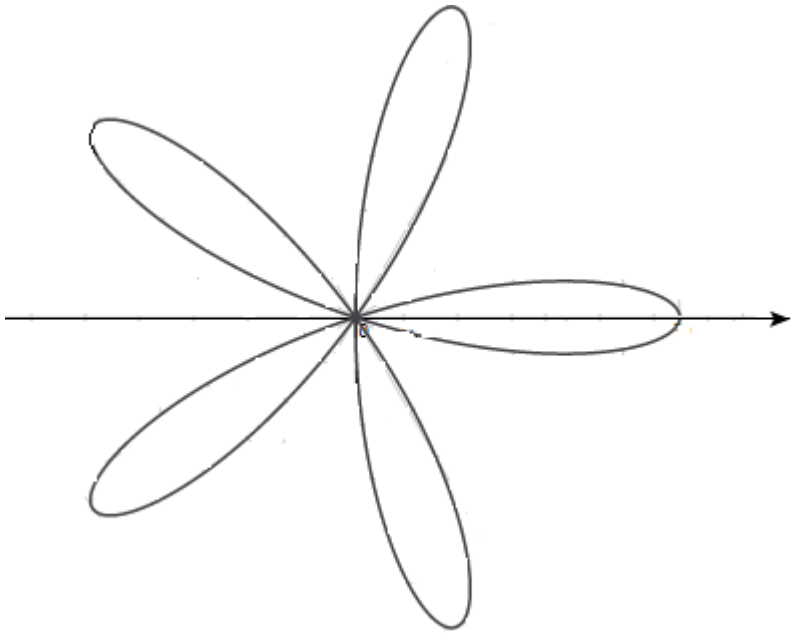
а) Строим графики парабол (1) и (2). Ветви параболы (1) направлены вверх, параболы (2) – вниз. Парабола (1) пересекает ось Оx в точках $x = -1, x = 3$, парабола (2) – в точках $x = 3 - \sqrt{6}$ и $x = 3 + \sqrt{6}$.

б) Найдем абсциссы точек пересечения парабол (1) и (2), решив систему $\begin{cases} y = x^2 - 2x - 3 \\ y = -x^2 + 6x - 3 \end{cases}$, получим $x_1 = 0, x_2 = 4$.

в) Запишем интеграл, выражающий площадь этой фигуры:

$$S = \int_0^4 \left(-x^2 + 6x - 3 - (x^2 - 2x - 3)\right)dx = \int_0^4 (-2x^2 + 8x)dx.$$

2. Фигура ограничена кривой, заданной в полярных координатах $\rho = a\cos 5\varphi$.



© Алтайский государственный педагогический университет, 2021

Изобразим фигуру графически.

- Область расположения

$$\cos 5\varphi \geq 0 \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2}+2\pi k \leq 5\varphi \leq \frac{\pi}{2}+2\pi k \Leftrightarrow -\frac{\pi}{10}+\frac{2\pi k}{5} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{10}+\frac{2\pi k}{5}.$$

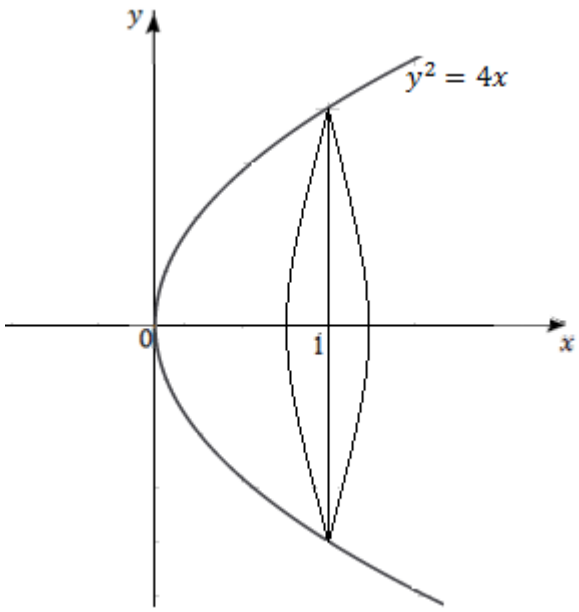
- $\rho_{max} = a$, при $5\varphi = 2\pi k \Rightarrow \varphi = \frac{2\pi k}{5}$.

- $\rho_{min} = 0$, при $5\varphi = \frac{\pi}{2}+2\pi k \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{10}+\frac{2\pi k}{5}$.

Для вычисления площади найдем площадь половины лепестка и умножим на 10,

$$S = 10 * \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} a^2 \cos^2 5\varphi \, d\varphi.$$

3. Парабола $y^2 = 4x$ симметрична относительно оси Ox и вращается вокруг нее. При вращении образуется параболоид. От этого параболоида плоскость $x = 1$ отсекает некоторое тело-чашу, объем которого нам необходимо найти.



Разрешим уравнение $y^2 = 4x$ относительно y: $y = \sqrt{4x}$ – это ветвь параболы, лежащая в первой четверти. Для вычисления объема тела вращения, полученного при вращении ветви $y = \sqrt{4x}$, воспользуемся формулой $V_{\text{т.вр}} = \pi \int_a^b f^2(x)dx$, где $y = f(x)$ – кривая,

© Алтайский государственный педагогический университет, 2021

ограничивающая криволинейную трапецию с основанием $[a, b]$. В условии задачи $[a, b] = [0, 1]$.

$$V = \pi \int_0^1 \left(\sqrt{4x}\right)^2 dx = 4\pi \int_0^1 x dx = \cdots$$

Рекомендованная литература

Берман Г. Сборник задач по курсу математического анализа. М., 2001 (глава «Определенный интеграл»).

© Алтайский государственный педагогический университет, 2021

Занятие № 4. Определенный интеграл. Вычисление с помощью определенного интеграла: длин дуг плоских кривых, площадей поверхностей пространственных фигур

Тема «Определенный интеграл. Вычисление с помощью определенного интеграла: длин дуг плоских кривых, площадей поверхностей пространственных фигур», 2 ч.

I. Повторить теорию

1. Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла.
2. Вычисление длины дуги плоской кривой с помощью определенного интеграла в декартовых и полярных координатах.
3. Вычисление площади поверхности пространственной фигуры с помощью определенного интеграла.

II. Решить

4.1. Вычислите длины указанных ниже дуг:

4.1.1. Длину дуги линии $y = lnx$ от $x_1 = \sqrt{3}$ до $x_2 = \sqrt{8}$.

4.1.2. Длину дуги полукубической параболы $y^2 = \frac{2}{3}(x-1)^3$, заключенной внутри параболы $y^2 = \frac{x}{3}$.

4.1.3. Дана астроида $x = Rcos^3t$, $y = Rsin^3t$ и точки на ней $A(R;0)$ и $B(0;R)$. Найти на дуге AB такую точку M, чтобы длина дуги AM составляла четверть длины дуги AB.

4.2. Вычислите площади нижеследующих поверхностей вращения:

4.2.1. Найти площадь поверхности, образованной вращением параболы $y^2 = 4ax$ вокруг оси абсцисс от вершины до точки с абсциссой $x = 3a$.

4.2.2. Найти площадь поверхности, образованной вращением астроиды $x = acos^3t$, $y = asin^3t$ вокруг оси абсцисс.

4.3. Найдите центры масс нижеследующих плоских фигур и дуг:

4.3.1. Найдите центр масс симметрического параболического сегмента с основанием, равным a, и высотой h.

4.3.2. Найдите координаты центра масс полуокружности $y = \sqrt{r^2 - x^2}$.

© Алтайский государственный педагогический университет, 2021

4.3.3. Найдите координаты центра масс полукруга, ограниченного осью абсцисс и полуокружностью $y = \sqrt{r^2 - x^2}$.

4.3.4. Найдите статический момент дуги эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, лежащей в первом квадранте, относительно оси абсцисс (записать интеграл и расставить пределы интегрирования).

III. Образцы решения

1. Кривая $x = R\cos^3 t, y = R\sin^3 t$ от $A(R,0)$ до $B(0,R)$ есть дуга астроиды AB. Найдем значения параметра, соответствующие точкам A и B соответственно.

В точке A $R\cos^3 t = R \Rightarrow \cos^3 t = 1 \Rightarrow t = 0$; в точке B $R\cos^3 t = 0 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$.

а) Для нахождения длины дуги воспользуемся формулой:

$l = \int_{\mathcal{L}}^{\mathcal{B}} \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}\,dt, \begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \\ t \in [\mathcal{L}, \mathcal{B}] \end{cases}$. Тогда

$$l = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{((R\cos^3 t)')^2 + ((R\sin^3 t)')^2}\,dt = \cdots = \frac{3R}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t\,dt =$$

$$= \frac{3R}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t\,d2t = -\frac{3R}{4}\cos 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \cdots = \frac{3}{2}R.$$

б) $l_{AM} = \frac{1}{4}l_{AB} = \frac{3}{8}R$.

в) Найдем значение параметра t, соответствующее точке M.

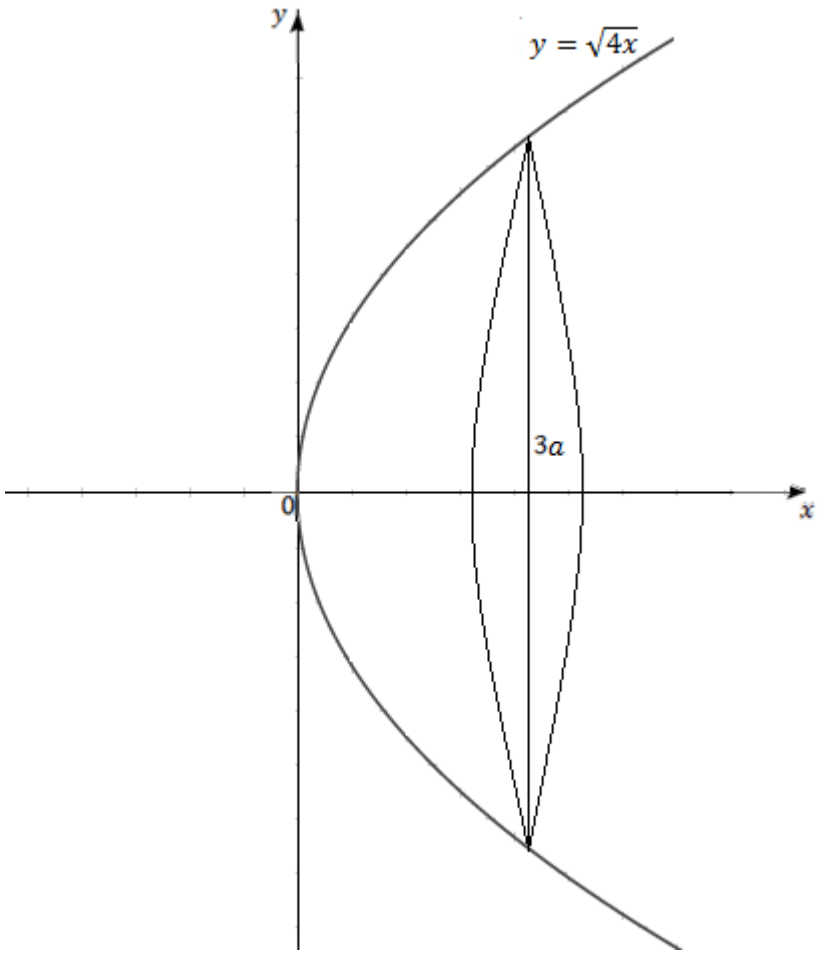
$$l_{AM} = \int_0^t \sin 2t\,dt = -\frac{3}{4}R\cos 2t\Big|_0^t = -\frac{3}{4}R\cos 2t + \frac{3}{4}R\cos 0 = -\frac{3}{4}R\cos 2t + \frac{3}{4}R.$$

г) Тогда $-\frac{3R}{4}\cos 2t + \frac{3R}{4} = \frac{3}{8}R \Rightarrow t = \frac{\pi}{6}$.

д) Находим координаты точки M: $\begin{matrix} x = R\cos^3\frac{\pi}{6} = \cdots \\ y = R\sin^3\frac{\pi}{6} = \cdots \end{matrix}$

© Алтайский государственный педагогический университет, 2021

2. Для нахождения площади поверхности вращения $y^2 = 4x$ вокруг оси Ox найдем ветвь этой параболы $y = \sqrt{4x}$, от вращения которой получается поверхность, и воспользуемся формулой $S = 2\pi \int\limits_a^b |f(x)| \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\, dx.$



$$S = \int\limits_0^{3a} \sqrt{4x} \sqrt{1 + \left(2\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^2}\, dx.$$

Рекомендованная литература

Берман Г. Сборник задач по курсу математического анализа. М., 2001 (глава «Определенный интеграл»).

© Алтайский государственный педагогический университет, 2021

Занятие № 5. Несобственные интегралы

Тема «Несобственные интегралы», 2 ч.

I. Повторить теорию

1. Несобственный интеграл с переменным верхним (нижним) пределом интегрирования.

2. Несобственный интеграл с переменными верхним и нижним пределами интегрирования.

3. Несобственные интегралы от разрывных функций.

II. Решить

5.1. Вычислите несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования (или установите их расходимость):

a) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^4}$;

b) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$;

c) $\int_0^{+\infty} e^{-ax}\,dx \quad (a > 0)$;

d) $\int_2^{+\infty} \frac{\ln x}{x}\,dx$;

e) $\int_0^{+\infty} \frac{xdx}{(1+x)^3}$;

f) $\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}}dx$;

g) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3}$.

5.2. Вычислите несобственные интегралы от функций с бесконечными разрывами (или установите их расходимость):

© Алтайский государственный педагогический университет, 2021

a) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$;

b) $\int_0^2 \frac{dx}{x^2-4x+3}$;

c) $\int_0^1 x \ln x \, dx$;

d) $\int_0^{\frac{1}{e}} \frac{dx}{x \ln^2 x}$;

e) $\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$;

f) $\int_{-1}^1 \frac{x-1}{\sqrt[5]{x^3}} dx$;

g) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{(x-2)\sqrt{1-x^2}}$;

h) $\int_{-1}^0 \frac{e^{\frac{1}{x}} dx}{x^2}$.

III. Образцы решения

1. $\int_0^{+\infty} e^{-ax} dx \ (a > 0)$.

Для вычисления данного несобственного интеграла с бесконечным верхним пределом:

а) Составляем и вычисляем интеграл с переменным верхним пределом:

$$\int_0^t e^{-ax} dx = -\frac{1}{a}\int_0^t e^{-ax} d(-ax) = -\frac{1}{a} e^{-ax}|_0^t = -\frac{1}{a}(e^{-at} - 1).$$

б) Вычисляем $\lim\limits_{t\to+\infty}\left(-\frac{1}{a}(e^{-at}-1)\right) = -\frac{1}{a}\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{1}{e^{at}} + \frac{1}{a} = \frac{1}{a}$.

© Алтайский государственный педагогический университет, 2021

Поскольку предел конечен, несобственный интеграл сходится.

2. $\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$.

Здесь точка $x = 1$ является точкой бесконечного разрыва подынтегральной функции $\left(\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{x\sqrt{\ln x}} = \infty\right)$.

а) Составляем и вычисляем интеграл с переменным нижним пределом: нижний предел интегрирования 1 заменяем на $1+\varepsilon$, где ε – переменная. Отступаем вправо, чтобы оставаться в области интегрирования.

$$\int_{1+\varepsilon}^{e} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}} = \int_{1+\varepsilon}^{e} (\ln x)^{-\frac{1}{2}} d\ln x = 2(\ln x)^{\frac{1}{2}}\Big|_{1+\varepsilon}^{e} = 2 - 2(\ln(1+\varepsilon))^{\frac{1}{2}}.$$

б) Находим $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\left(2 - 2\sqrt{\ln(1+\varepsilon)}\right) = 2$. Тогда $1+\varepsilon \to 1$.

Предел конечен, следовательно, интеграл сходится.

Рекомендованная литература

Берман Г. Сборник задач по курсу математического анализа. М., 2001 (глава «Определенный интеграл»).

Занятие № 6. Приложения определенного интеграла к вычислению различных физических и механических величин

Тема «Приложения определенного интеграла к вычислению различных физических и механических величин», 2 ч.

I. Повторить теорию

1. Схемы применения определенного интеграла. Характеристика схемы элементов.

2. Схемы применения определенного интеграла. Характеристика схемы дифференциалов.

3. Вычисление работы переменной силы.

4. Вычисление давления жидкости на вертикальную пластину.

5. Вычисление кинетической энергии тела вращения.

© Алтайский государственный педагогический университет, 2021

6. Вычисление количества электричества.

7. Вычисление координат центра масс материальной кривой и плоской пластины.

II. Решить

1. Вычислить работу, совершаемую при подъеме спутника с поверхности земли на высоту H, если масса спутника m, радиус земли R. Чему равна работа при удалении спутника в бесконечность?

2. Какую работу нужно произвести, чтобы насыпать кучу песка в форме усеченного конуса высотой 5 м, имеющего радиусы оснований 4 м и 1 м. Удельный вес песка 20 н/м^3 (песок поднимается с поверхности земли, на которой находится большее основание).

3. Деревянный поплавок цилиндрической формы, площадь основания которого $s = 4000$ см^2, а высота $H = 50$ см, плавает на поверхности воды. Плотность дерева $d = 0{,}8 \cdot 10^3$ кг/м^3. Какую работу нужно затратить, чтобы: а) вытащить поплавок из воды, б) погрузить поплавок в воду целиком?

4. Капля с начальной массой M падает под действием силы тяжести и равномерно испаряется, теряя ежесекундно массу m. Какова работа силы тяжести за время от начала движения до полного испарения капли? Сопротивлением воздуха пренебречь.

5. Какую работу нужно произвести, чтобы растянуть пружину на 4 см, если сила в 1 Дж растягивает ее на 1 см?

6. Два электрических заряда q_0 и q_1 находятся на оси Ox соответственно в точках $x_0 = 0$ и $x_1 = 1$ см. Какая работа будет произведена, если переместить второй заряд в точку $x_2 = 10$ см?

7. Два электрических заряда $q = 33{,}3 \cdot 10^{-9}$ Кл и $q = 40 \cdot 10^{-9}$ Кл находятся на расстоянии 20 см друг от друга. Каково будет расстояние между ними, если мы, приблизив второй заряд к первому, затратим работу $18 \cdot 10^{-5}$ Дж. Разделяющей средой служит воздух.

8. Вычислить работу, которую нужно затратить на выкачивание воды из резервуара, который имеет форму полуцилиндра (корыто), радиус основания которого 1 м, длина – 5 м.

9. Вычислить работу, которую нужно затратить, чтобы выкачать воду из резервуара, имеющего форму конуса, обращенного вершиной вниз. Радиус основания конуса 3 м, высота – 5 м.

© Алтайский государственный педагогический университет, 2021

10. Вычислить работу по выкачиванию воды из резервуара – цилиндрической цистерны с радиусом основания 2 м, длиной 5 м.

11. Найти силу давления жидкости на вертикальную пластину. Принять плотность $\rho = 1000\frac{\text{мг}}{\text{м}} 3, g = \frac{10\text{м}}{\text{с}}$.

12. Найти глубину, на которой вертикальный прямоугольный шлюз разделится горизонтально на такие две части, величины силы давления на которые равны.

13. Найти путь, пройденный материальной точкой за время t от начала движения, если скорость движения выражается формулой:

1) $v = 4\ t^2 + t - 3$, $t = 3$;

2) $v = 5t^2 - 3t + 3$, $t = 2$.

14. Вычислить кинетическую энергию диска массой M и радиуса R, вращающегося с угловой скоростью w вокруг оси, перпендикулярной его плоскости.

15. Найти массу стержня длиной l = 100 см, если линейная плотность стержня на расстоянии x от одного из концов равна $\rho = 2 + 0{,}001\ x^2$ г/см.

16. Скорость движения точки $v = t\ e^{-0{,}01t}$. Найти путь, пройденный точкой от начала до полной остановки.

17. Два тела движутся по одной и той же прямой. Одно из них движется со скоростью $V(t) = 3t - 4t$ (м/с), второе – со скоростью $V(t) = 4\ (t - 3)$ (м/с). Если в начальный момент они были вместе, то в какой момент и на каком расстоянии от начала движения они опять будут вместе?

18. Найти момент инерции полукруга радиуса R относительно диаметра.

19. Найти момент инерции прямоугольника со сторонами a и b относительно стороны a.

20. Найти момент инерции прямоугольного треугольника с катетами a и b относительно катета a.

21. Найти момент инерции дуги кривой $y = x^2$ $(0 \le x \le \frac{1}{2})$ относительно оси абсцисс.

22. Определить массу прямого кругового конуса, высота которого равна H, а угол между высотой и образующей равен α, если плотность в каждой точке конуса

© Алтайский государственный педагогический университет, 2021

пропорциональна расстоянию её от плоскости, проходящей через его вершину параллельно основанию.

23. С какой силой полукольцо радиуса r и массой M действует на материальную точку массы m, находящуюся в его центре?

24. Стержень AB вращается в горизонтальной плоскости вокруг оси OO', перпендикулярной плоскости вращения, проходящей через один из концов стержня, со скоростью $W = 10$ рад/с. Поперечное сечение стержня равно $s = 4$ см^2, длина стержня $l = 20$ см, плотность материала $\rho = 7{,}5\ 10^3$ мг/м^3. Найти кинетическую энергию стержня.

25. Найти центры масс:

1) верхней полуокружности с центром в начале координат и радиусом r;

2) полукруга, ограниченного нижней дугой полуокружности радиуса r с центром в точке (r, 0) и осью Ox;

3) сектора круга радиуса с центральным углом, равным $\frac{\pi}{2}$.

© Алтайский государственный педагогический университет, 2021

3. КОНТРОЛЬНО-ОЦЕНОЧНЫЕ СРЕДСТВА

3.1. Творческое задание по теме «Определенный интеграл и его приложения»

3.2. Средства оценивания выполненного творческого задания по теме «Определенный интеграл и его приложения».

3.3. Портфолио

3.4. Самостоятельная работа

3.5. Вопросы к зачету

© Алтайский государственный педагогический университет, 2021

3.1. Творческое задание по теме «Определенный интеграл и его приложения»

3.1.1. Из нижеследующих интегралов выбрать 5 интегралов, при вычислении которых применяются различные свойства определенного интеграла и формула Ньютона – Лейбница. Для каждого интеграла составить алгоритм решения, аргументировать каждый шаг решения, пояснить, как применяются свойства интеграла и формула Ньютона – Лейбница.

1. $\int_{-0,5}^{1} \frac{dx}{\sqrt{8+2x-x^2}}$

2. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\cos x}$

3. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x \sin 2x dx$

4. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x - \cos^2 x}\, dx$

5. $\int_{0}^{\frac{\pi}{\omega}} \sin^2(\omega x + \phi_0)\, dx$

6. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^3 x\, dx}{\sqrt[3]{\sin x}}$

7. $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} ctg^4 \varphi\, d\varphi$

8. $\int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin\frac{1}{x}}{x^2} dx$

9. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos t \cdot \sin\left(2t - \frac{\pi}{4}\right) dt$

© Алтайский государственный педагогический университет, 2021

10. $\int_0^1 xe^{-x}\,dx$

11. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx$

12. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{xdx}{\sin^2 x}$

13. $\int_0^{e^{-1}} ln(x+1)\,dx$

14. $\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx$

15. $\int_0^1 \frac{arctg^3 xdx}{1+x^2}$

16. $\int_0^1 e^x \cos e^x\,dx$

17. $\int_0^1 e^x(e^x-2)dx$

18. $\int_1^e \frac{1+2\ln x}{x}dx$

3.1.2. Из нижеследующих задач выбрать по три интеграла, берущиеся при помощи методов интегрирования подстановкой и по частям. Осуществляя выбор, следить за тем, чтобы выбранные интегралы не были однотипными (требовали использования различных подстановок, различного разбиения на части). Выделить основные этапы вычисления интегралов. Пояснить выполнение каждого этапа.

1. $\int_{0,5}^{0,6}\left(\frac{3}{\sqrt{9-9x^2}}-\frac{x^2+1}{x^3}\right)dx$

© Алтайский государственный педагогический университет, 2021

2. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{4\sin x\,dx}{5\cos x\sin 2x}$

3. $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^4 x-\cos^4 x}{\sin^2 2x}dx$

4. $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{3^x+2^x+1}{5^x}dx$

5. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x dx}{1+\sin 2x}$

6. $\int_{3}^{4} \frac{3xdx}{\sqrt{x^2-8}}$

7. $\int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x}\cos^2\sqrt{x}}$

8. $\int_{-1}^{0} x^2\sqrt{1+x^3}dx$

9. $\int_{1}^{2} \frac{\sqrt{4-x^2}dx}{x^3}$

10. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x dx}{\sqrt{1+\sin^2 x}}$

11. $\int_{4}^{5} \frac{\sqrt{9+x^2}dx}{x^3}$

12. $\int_{3}^{5} \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-9}}$

13. $\int_{0}^{1} (3x+2)e^{2x}dx$

© Алтайский государственный педагогический университет, 2021

14. $\int_2^3 3x\,ln(x-1)\,dx$

15. $\int_1^{e^{\frac{\pi}{2}}} cos\ ln\ x\,dx$

16. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} xe^x\,cos\,x\,dx$

17. $\int_0^1 \sqrt{2-x^2}dx$

18. $\int_1^2 \frac{x+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}}dx$

19. $\int_{-1}^0 \frac{\sqrt{x+1}-1}{(x+1)^2-\sqrt{x+1}}dx$

20. $\int_4^{12} \frac{\sqrt{2x+1}}{x+1}\cdot\frac{dx}{x^2}$

21. $\int_1^2 \frac{\sqrt[3]{x+2}}{x}dx$

22. $\int_0^{\pi} cos\,3\,x\cdot cos\,4\,xdx$

23. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{cos\,d\,x}{4-sin^2\,x}$

24. $\int_0^{\frac{\pi}{6}} cos^3\,2\,x\cdot sin\,2\,xdx$

25. $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{sin\,x}$

© Алтайский государственный педагогический университет, 2021

26. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x\,dx}{1+\cos x}$

27. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{1+\sin 2x}$

28. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin x-\cos x-1}$

29. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\cos^2 x}$

30. $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin x\,(\cos x-1)}$

31. $\int_{-1}^{6} x\cdot\sqrt[3]{2+x}dx$

32. $\int_0^1 arctg\left(1+\sqrt{x}\right)dx$

33. $\int_0^1 e^{\sqrt[3]{x}}dx$

34. $\int_1^2 \frac{dx}{(1-2x)^3}$

3.1.3. Из приведенных ниже задач выбрать и решить 5 задач на вычисление площадей плоских фигур. Осуществляя выбор, следить за тем, чтобы фигуры по-разному были расположены относительно координатных осей. Следить за правильностью выбора подынтегральной функции и расстановки пределов интегрирования. Обязательно рассмотреть случаи, когда кривые, ограничивающие область, заданы параметрически или в полярных координатах.

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями, уравнения которых $y^2=2x+1$ и $x-y-1=0$.

© Алтайский государственный педагогический университет, 2021

2. Найти площадь фигуры, заключенной между параболой $y = x^2 + 4x - 3$ и касательными к ней в точках (0; –3) и (3; 0).

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $y^2 = 2px$ и нормалью к ней, наклоненной к оси абсцисс под углом 135^0.

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболами $y = x^2$ и $y = \sqrt{x}$.

5. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболами $y^2 + 8x = 16$ и $y^2 - 24x = 48$.

6. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$ и $y = \frac{x^3}{3}$.

7. Круг $x^2 + y^2 \leq 8$ разделен параболой $y = \frac{x^2}{2}$ на 2 части. Вычислить площадь каждой из них.

8. Найти площади двух фигур, на которые парабола $y^2 = 6x$ делит круг $x^2 + y^2 \leq 16$.

9. Из круга радиуса a вырезали эллипс, большая ось которого совпадает с одним из диаметров, а меньшая равна $2b$. Доказать, что площадь оставшейся части равна площади эллипса с полуосями a и $a - b$.

10. Найти площадь фигуры, ограниченной дугой гиперболы, проведенной из фокуса перпендикулярно действительной полуоси.

11. Круг $x^2 + y^2 \leq a^2$ разбивается гиперболой $x^2 - 2y^2 = \frac{a^2}{4}$ на 3 части. Найти площадь каждой из них.

12. а) Вычислить площадь криволинейной трапеции с основанием $[a; b]$, ограниченной линией $y = lnx$.

б) Вычислить площадь фигуры, ограниченной $y = lnx$, осью ординат и прямыми $y = lna, y = lnb$.

13. Вычислить площадь фигуры, ограниченной $y = lnx$ и $y = ln^2 x$.

14. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \frac{lnx}{4x}$ и $y = xlnx$.

© Алтайский государственный педагогический университет, 2021

15. Вычислить площадь одного из криволинейных треугольников, ограниченных осью Ox и линиями $y = sinx$ и $y = cosx$.

16. Вычислить площадь криволинейного треугольника, ограниченного осью ординат и линиями $y = tgx$ и $y = \frac{2}{3}cosx$.

17. Найти площадь, ограниченную одной аркой циклоиды $x = a(t - sint)$, $y = a(1 - cost)$ и осью абсцисс.

18. Вычислить площадь фигуры, ограниченной астроидой $x = acos^3t, y = asin^3t$.

19. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $x = 3t^2, y = 3t - t^2$.

20. Найти площадь фигуры, ограниченной линией $\rho = asin2\varphi$ (двулепестковая роза).

21. Найти площадь фигуры, ограниченной линией $\rho = acos5\varphi$.

22. Найти площадь фигуры, ограниченной улиткой Паскаля $\rho = 2a(2 + cos\varphi)$.

23. Найти площадь общей части фигур, ограниченных линией $\rho = 3 + cos4\varphi$ и прямой $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

3.1.4. Из задач выбрать и решить три задачи на вычисление объема тела вращения. Особое внимание обратить на составление и обоснование подынтегральной функции и расстановку пределов интегрирования.

1. Эллипс, большая ось которого равна $2a$, малая $2b$, вращается вокруг: 1) большей оси, 2) меньшей оси. Вычислите объемы получающихся эллипсоидов вращения. В частном случае получить объем шара.

2. Фигура, ограниченная гиперболой $x^2 - y^2 = a^2$ и прямой $x = a + h(h > 0)$, вращается вокруг оси абсцисс. Найти объем тела вращения.

3. Криволинейная трапеция, ограниченная $y = xe^x$ и прямыми $x = 0$ и $x = 1$, вращается вокруг оси абсцисс. Найти объем тела, которое при этом получается.

4. Фигура, ограниченная дугами парабол $y = x^2$ и $y^2 = x$, вращается вокруг оси абсцисс. Найти объем получающегося тела вращения.

© Алтайский государственный педагогический университет, 2021

5. Найти объем тела, полученного от вращения криволинейной трапеции, ограниченной линией $y = arcsinx$, с основанием $[0;1]$ вокруг оси Ox.

6. Вычислить объем тела, полученного от вращения фигуры, ограниченной параболой $y = 2x — x^2$ и осью абсцисс, вокруг оси ординат.

7. Вычислить объем тела, который получится от вращения вокруг оси ординат криволинейной трапеции, ограниченной дугой синусоиды $y = sinx$, соответствующей полупериоду.

8. Лемниската $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ вращается вокруг оси абсцисс. Найти объем тела, ограниченного поверхностью, которая при этом получается.

9. Вычислить объем тела, полученного при вращении вокруг оси абсцисс фигуры, ограниченной линией: а) $x^4 + y^4 = a^2x^2$; б) $x^4 + y^4 = x^3$.

3.1.5. Из задач выбрать и решить три задания на вычисление длины дуги. Обосновать составление подынтегральной функции и пределов интегрирования.

1. Найти длину дуги линии $y = lnx$ от точки $x_1 = \sqrt{3}$ до $x_2 = \sqrt{8}$.

2. Найти длину линии $y = ln(1 - x^2)$ от точки $x_1 = 0$ до $x_2 = \frac{1}{2}$.

3. Найти длину дуги линии $y = ln\frac{e^x + 1}{e^x - 1}$ от точки $x_1 = a$ до $x_2 = b$.

4. Найти длину дуги полукубической параболы $y^2 = \frac{2}{3}(x - 1)^3$, заключенной внутри параболы $y^2 = \frac{x}{3}$.

5. Вычислить длину полукубической параболы $5y^3 = x^2$, заключенной внутри окружности $x^2 + y^2 = 6$.

6. Вычислить длину петли линии $9ay^2 = x(x - 3a)^2$.

7. Вычислить периметр одного из криволинейных треугольников, ограниченных осью абсцисс и линиями $y = lncosx$ и $y = lnsinx$.

© Алтайский государственный педагогический университет, 2021

8. Найти длину дуги линии $y = \frac{x^2}{2} - \frac{lnx}{2}$, заключенной между ее наинизшей точкой и вершиной (точка с экстремальной кривизной).

9. Найти длину дуги линии $y = \sqrt{x - x^2} + arcsin\sqrt{x}$.

10. Найти длину линии $(y - arcsinx)^2 = 1 - x^2$.

11. На $x = a(t - sint), y = a(1 - cost)$ найти точку, которая делит первую арку циклоиды по длине в отношении 1:3.

12. Дана астроида $x = Rcos^3t, y = Rsin^3t$ и точки на ней $A(R;0)$ и $B(0;R)$. На дуге *AB* найти такую точку *M*, чтобы длина дуги *AM* составляла четверть длины дуги *AB*.

13. Найти длину дуги архимедовой спирали $\rho = a\varphi$ от начала до конца первого завитка.

14. Найти длину кардиоиды $\rho = a(1 + cos\varphi)$.

15. Найти длину дуги линии $\rho = asin^2\frac{\varphi}{3}$.

3.1.6. Из задач выбрать и решить два задания на вычисление площади поверхности. Обратить внимание на обоснование структуры и приемов решения.

1. Вычислить площадь поверхности, образованной вращением кубической параболы $3y - x^3 = 0$ вокруг оси абсцисс ($x_1 = 0$ до $x_2 = a$).

2. При вращении эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ вокруг большой оси получается поверхность, называемая удлиненным эллипсоидом вращения, при вращении вокруг малой – укороченным эллипсоидом вращения. Найти площади поверхности удлиненного и укороченного эллипсоидов вращения.

3. Вычислить площадь веретенообразной поверхности, образованной вращением одной арки синусоиды $y = sinx$ вокруг оси *Ox*.

4. Дуга тангенсоиды $y = tgx$ от ее точки $(0;0)$ до точки $\left(\frac{\pi}{4};1\right)$ вращается вокруг оси *Ox*. Вычислить площадь поверхности, которая при этом получается.

© Алтайский государственный педагогический университет, 2021

5. Найти площадь поверхности, образованной вращением астроиды $x = acos^3 t, y = asin^3 t$ вокруг оси абсцисс.

6. Арка циклоиды вращается вокруг своей оси симметрии. Найти площадь поверхности, получаемой при этом.

7. Найти площадь поверхности, образованной вращением кардиоиды $\rho = a(1 + cos\varphi)$ вокруг полярной оси.

© Алтайский государственный педагогический университет, 2021

3.2. Средства оценивания выполненного творческого задания по теме «Определенный интеграл и его приложения».

Основой для оценивания служат:

- знания теоретической базы применения определенного интеграла к вычислению площадей плоских фигур, объемов тел вращения, длин дуг, площадей поверхностей (источники возникновения определенного интеграла); конструирования и понятия определенного интеграла; свойств определенного интеграла; формул вычисления с помощью определенного интеграла указанных объектов;

- умения конструировать определенный интеграл, служащий моделью рассматриваемого конкретного объекта;

- владение приемами исследования полученной модели изучаемого объекта.

Показатели	**Баллы**
Все пункты задания выполнены полностью, четко, последовательно. Правильно подобраны задания к каждому пункту. Задания каждого пункта разнотипны. Выделены основные этапы выполнения задания, приведена необходимая аргументация. Правильно записаны необходимые формулы. Даны пояснения по их использованию, свидетельствующие о наличии теоретических знаний и умений их применять к решению задач. Правильно выполнены все действия на каждом этапе решения задачи. При решении задач на применение определенного интеграла правильно составлена подынтегральная функция и расставлены пределы интегрирования. Грамотно применены методы интегрирования и свойства определенного интеграла	30–35
Правильно подобраны задания к каждому пункту. Задания каждого пункта разнотипны. Выделены основные этапы выполнения задания, приведена необходимая аргументация. Правильно записаны необходимые формулы. Даны пояснения по их использованию, свидетельствующие о наличии теоретических знаний и умений их применять к решению задач. При выполнении действий в процессе вычисления интегралов допущены неточности и несущественные неповторяющиеся ошибки. При решении задач на применение определенного интеграла правильно составлена подынтегральная функция и расставлены пределы интегрирования. При выполнении действий в процессе вычисления интегралов допущены неточности и несущественные неповторяющиеся ошибки	24–29
Правильно подобраны задания к каждому пункту. Задания каждого пункта разнотипны. Выделены основные этапы выполнения задания, приведена необходимая аргументация. Правильно записаны необходимые формулы. Даны пояснения по их использованию, свидетельствующие о наличии теоретических знаний и умений их применять к решению задач. При решении задач на применение определенного интеграла правильно составлена подынтегральная функция, но допущены неточности при расстановке пределов интегрирования. При выполнении действий в процессе вычисления интегралов допущены отдельные грубые ошибки	16–23

© Алтайский государственный педагогический университет, 2021

Правильно подобраны задания к каждому пункту. Задания каждого пункта разнотипны. Выделены основные этапы выполнения задания, приведена необходимая аргументация. Записаны необходимые формулы. Даны пояснения по их использованию, свидетельствующие о непрочности теоретических знаний и умений их применять к решению задач. При решении задач на применение определенного интеграла допущены ошибки при составлении подынтегральной функции и при расстановке пределов интегрирования. При выполнении действий в процессе вычисления интегралов допущены грубые ошибки	1–15

© Алтайский государственный педагогический университет, 2021

3.3. Портфолио

Портфолио составляется на основе изучения, осмысления теоретического материала по двум изучаемым темам («Определенный интеграл», «Числовые ряды»). Содержит: 1) четкие формулировки определений понятий изученных разделов; 2) примеры объектов, конкретизирующих понятия; 3) четкие формулировки ведущих утверждений каждого раздела, имеющих практическое значение; 4) четкие, последовательные, аргументированные доказательства ведущих утверждений.

© Алтайский государственный педагогический университет, 2021

3.4. Самостоятельная работа

Самостоятельное изучение и составление портфолио по теме «Статические моменты и центры масс плоских кривых и фигур».

© Алтайский государственный педагогический университет, 2021

3.5. Вопросы к зачету

1. Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла.
2. Понятие определенного интеграла.
3. Суммы Дарбу, их свойства.
4. Необходимое и достаточное условие интегрируемости функции, классы интегрируемых функций.
5. Интегрируемость непрерывной функции.
6. Свойства определенного интеграла.
7. Определенный интеграл с переменным верхним пределом, его свойства.
8. Формула Ньютона – Лейбница.
9. Интегрирование по частям в определенном интеграле.
10. Интегрирование заменой переменной в определенном интеграле.
11. Понятие квадрируемой фигуры и её площади.
12. Вычисление площадей плоских фигур.
13. Объём тела вращения.
14. Спрямляемые кривые, длина дуги.
15. Вычисление длин дуг.
16. Понятие площади поверхности.
17. Вычисление площади поверхности.
18. Статические моменты и центры масс.
19. Вычисление центра масс материальной плоской кривой.
20. Вычисление центра масс материальной плоской фигуры.
21. Несобственные интегралы первого рода.
22. Вычисление несобственных интегралов первого рода.
23. Несобственные интегралы второго рода.

© Алтайский государственный педагогический университет, 2021

24. Вычисление несобственных интегралов второго рода.
25. Схемы применения определенного интеграла. Характеристика схемы элементов.
26. Схемы применения определенного интеграла. Характеристика схемы дифференциалов.
27. Вычисление работы переменной силы.
28. Вычисление давления жидкости на вертикальную пластину.
29. Вычисление кинетической энергии тела вращения.
30. Вычисление количества электричества.
31. Вычисление координат центра масс материальной кривой и плоской пластины.

© Алтайский государственный педагогический университет, 2021

4. МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ДЛЯ ОРГАНИЗАЦИИ САМООБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ СТУДЕНТОВ ПО УСВОЕНИЮ ТЕОРЕТИЧЕСКИХ ЗНАНИЙ И СПОСОБОВ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ПО РАЗДЕЛУ «ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ»

Основными функциями настоящего учебно-методического пособия «Определенный интеграл» в математической подготовке будущего учителя в условиях дистанционного обучения являются:

- организовать самообразовательную деятельность студентов и создать педагогические условия для её развития в предметном поле «математика»;
- опираясь на приобретаемый студентами опыт осуществления самообразовательной деятельности, стимулировать и направлять ее на усвоение и развитие математических знаний и способов деятельности средствами изучаемого раздела учебной дисциплины;
- формировать познание будущими учителями источников возникновения математики, развития ее теорий, методов и становления как средства развития различных областей научного знания и человеческой практики;
- формировать научное мировоззрение будущего учителя математики.

Для успешной реализации перечисленных функций и преподавателю, и студентам необходимо соблюдать нижеследующие рекомендации.

4.1. Методические рекомендации преподавателю для организации самообразовательной деятельности студента по усвоению теоретических знаний и способов деятельности по разделу «Определенный интеграл»

4.2. Рекомендации студентам по организации самообразовательной деятельности

4.3. Рекомендации обучающимся с ограниченными возможностями здоровья (ОВЗ)

© Алтайский государственный педагогический университет, 2021

4.1. Методические рекомендации преподавателю для организации самообразовательной деятельности студента по усвоению теоретических знаний и способов деятельности по разделу «Определенный интеграл»

Для решения задач, стоящих перед указанным разделом математического анализа, преподаватель, выдавая задание по изучению материала вводной лекции, должен обратить внимание на структуру дисциплины, назначение каждого ее компонента, на важность продуктивного самостоятельного изучения материала лекционного курса, служащего теоретической базой для овладения способами деятельности. Ориентироваться при этом следует на задания на повторение теории, обозначенные на каждом практическом занятии. Целесообразно также заострить внимание студента на том, что итогом изучения теоретического материала должно быть грамотное составление портфолио, требования к которому обозначены в контрольно-оценочном блоке дисциплины, и пояснить их.

Перед началом практических занятий необходимо разъяснить, что четко продуманная система заданий на каждом из них ориентирована на активизацию учебно-познавательной деятельности обучающихся, их активное участие в процессе анализа изученного теоретического материала, определение путей использования его для доказательства утверждений, решения математических задач прикладной направленности и выяснения роли математики в современном мире. Их выполнение в полном объеме важно для приобретения умений и навыков выполнения универсальных действий с изучаемыми понятиями, теоремами.

Особого внимания и разъяснения требует блок 3 «Контрольно-оценочные средства». Именно этот блок содержит задания, являющиеся контрольными срезами, и совокупность критериев и показателей уровня усвоения теоретических знаний и способов деятельности.

© Алтайский государственный педагогический университет, 2021

4.2. Рекомендации студентам по организации самообразовательной деятельности

Программа курса включает теоретическую и практическую часть. Основы теоретической части излагаются на лекции, где вводятся ключевые понятия курса (определенный интеграл, криволинейная трапеция, площадь криволинейной трапеции, площадь плоской фигуры, длина дуги, объем тела, площадь поверхности вращения и др.), рассматриваются основные утверждения, служащие основой использования аппарата интегрального исчисления в различных разделах науки и практики, раскрывается суть и приемы доказательства утверждений, сущность научных методов, используемых в математической науке и в школьной математике, даются рекомендации по организации самостоятельной учебной деятельности по изучению настоящей учебной дисциплины. Каждому студенту необходимо строго следовать рекомендациям преподавателя.

Дальнейшая отработка математических понятий, теорем, приемов и способов доказательства теорем, обоснования решения математических задач осуществляется на практических занятиях и во время осуществления самостоятельной работы над контрольно-оценочными заданиями. Основным результатом освоения дисциплины является знание определений изучаемых понятий и различных их интерпретаций, формулировок основных теорем, методов научной аргументации и умение применять понятийный аппарат и теоремы к обоснованию утверждений и решению задач. Поскольку речь идет о дистанционном обучении, каждое практическое задание сопровождается приведением образцов решения задач, правильного оформления решений, необходимыми графическими иллюстрациями. Это должно способствовать активизации учебной деятельности обучающихся, овладению ее приемами и методами для успешной внеконтактной самостоятельной работы без активной помощи преподавателя. Результаты такой деятельности учитываются при подведении итогов работы в конце каждого семестра.

Формирование общепрофессиональных и профессиональных компетенций будущего бакалавра обеспечивается построением содержания лекционных и практических занятий на основе системно-деятельностного подхода. Активизация учебной деятельности на занятиях по данной дисциплине обеспечивается использованием следующих образовательных технологий: различные уровни проблемного обучения, различные формы коллективного способа обучения, модульное обучение, метод проектов, авторские методики проблемного изложения лекционного материала, привлечение студентов к постановке и поиску решения проблем с целью развития учебно-познавательной деятельности обучающихся и их профессиональных навыков.

© Алтайский государственный педагогический университет, 2021

Профессиональная подготовка обеспечивается также выполнением системы заданий поисково-исследовательского и творческого характера.

Обучающимся следует иметь в виду, что результаты их деятельности на лекционных, практических занятиях и при выполнении различного рода самостоятельных творческих работ учитываются с помощью накопительной балльно-рейтинговой системы оценки результатов учебной деятельности. Каждый вид деятельности должен выполняться в строго отведенный срок.

© Алтайский государственный педагогический университет, 2021

4.3. Рекомендации обучающимся с ограниченными возможностями здоровья (ОВЗ)

Специальные условия обучения в АлтГПУ определены «Положением об инклюзивном образовании» (утверждено приказом ректора от 25.12.2015 г. № 312/1п).

Построение образовательного процесса ориентировано на учет индивидуальных возрастных, психофизических особенностей обучающихся, в частности предполагается возможность разработки индивидуальных учебных планов. Реализация индивидуальных учебных планов сопровождается поддержкой тьютора (родителя, взявшего на себя тьюторские функции в процессе обучения, волонтера).

Обучающиеся с ОВЗ, как и все остальные студенты, могут обучаться по индивидуальному учебному плану в установленные сроки с учетом индивидуальных особенностей и специальных образовательных потребностей конкретного обучающегося. Средствами индивидуализации обучения лиц с ограниченными возможностями здоровья могут быть:

- проведение индивидуальных или групповых онлайн-занятий с целью устранения сложностей в усвоении лекционного материала, подготовке к практическим занятиям, выполнению заданий по самостоятельной работе. Для лиц с ОВЗ, по их просьбе, могут быть адаптированы как сами задания, так и формы их выполнения;

- выполнение под руководством преподавателя индивидуального проектного задания, позволяющего сочетать теоретические знания и практические навыки;

- применение мультимедийных технологий в процессе ознакомительных лекций и семинарских занятий, что позволяет экономить время, затрачиваемое на изложение необходимого материала, и увеличить его объем;

- дистанционная форма индивидуальных консультаций, выполнения заданий на базе платформы «Moodle»;

- форма проведения текущей аттестации для студентов с ОВЗ устанавливается с учетом индивидуальных психофизических особенностей (устно, письменно на бумаге, письменно на компьютере, в форме тестирования и т. п.). При необходимости лицам с ОВЗ может быть предоставлено дополнительное время для подготовки к ответу на зачете или экзамене, выполнения задания по самостоятельной работе.

Студент с ограниченными возможностями здоровья обязан выполнять требования образовательной программы, предъявляемые к степени овладения соответствующими знаниями.

© Алтайский государственный педагогический университет, 2021

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Настоящее учебно-методическое пособие реализует программу одного из разделов математического анализа, разработанную авторами в соответствии с требованиями ФГОС подготовки специалистов для сферы образования по направлению «Педагогическое образование» (профиль «Математика»), а также бакалавров по инженерным направлениям «Прикладная математика» и «Прикладная информатика» и профессионального стандарта «Педагог профессионального обучения, профессионального образования и дополнительного профессионального образования», утвержденного приказом Министерства труда и социальной защиты Российской Федерации от 8 сентября 2015 г. № 608н.

В структуре и развертывании содержания четко прослеживается следование авторов выделенным принципам:

а) разумное сочетание научности и доступности изложения фактов;

б) гармонизация теоретической и практической составляющих математической подготовки будущего учителя математики;

в) взаимосвязь изучения определенного интеграла с другими разделами математического анализа, с другими математическими дисциплинами, физикой, астрономией и иными областями научного знания и практической деятельности;

г) управляемость процессом усвоения знаний и способов деятельности.

Содержание, способы предъявления теоретического и практического учебного материала позволяют решать задачи организации осознанного усвоения теоретических знаний и практических навыков, формирования самообразовательной и рефлексивной деятельности, развития мировоззрения, осознания обучающимися сущности математизации современного знания и математического моделирования и приобретения умений использования определенного интеграла к решению задач из различных областей научного знания и практической деятельности.

Материалы учебно-методического пособия могут быть использованы в преподавании математики при подготовке учителей различного профиля, в преподавании математики в школах и классах с углубленным изучением математики, при реализации дополнительных программ в средней общеобразовательной школе, расширяющих математические знания школьников и их кругозор.

© Алтайский государственный педагогический университет, 2021

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ахтямов, А. М.* Математика для социологов и экономистов : учебное пособие / А. М. Ахтямов. – Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 464 с.

2. *Берман, Г. Н.* Сборник задач по курсу математического анализа / Г. Н. Берман. – Москва : Наука, 1972. – 384 с.

3. *Бугров, Я. С.* Дифференциальное и интегральное исчисление / Я. С. Бугров, С. М. Никольский. – Москва : Наука, 1988. – 246 с.

4. Высшая математика для экономистов : учебник / под ред. Н. Ш. Кремера. – 3-е изд. – Москва : ЮНИТИ–ДАНА, 2007. – 479 с.

5. *Данко, П. Е.* Высшая математика в упражнениях и задачах : в 2 ч. / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова – Москва : Наука, 2001. – Ч. 2. – 416 с.

6. *Киркинский, А. С.* Математический анализ : учебное пособие для вузов / А. С. Киркинский. – Москва : Академический Проект, 2006. – 526 с.

7. *Колесников, А. Н.* Краткий курс математики для экономистов / А. Н. Колесников. – Москва : Банки и биржи, 2000. – 207 с.

8. *Красс, М. С.* Основы математики и ее приложения в экономическом образовании / М. С. Красс, Б. П. Чупрынов. – Москва : Дело, 2001. – 688 с.

9. *Луканкин, Г.* Приложение определенного интеграла в экономике / Г. Луканин, Н. Хоркина. – URL: http://mat.lseptember.ru/2001/13/nol3_01.htm (дата обращения: 15.09.2021).

10. *Ляпунова, М. Г.* Приложение определенных интегралов к решению задач геометрии и физики : учеб.-метод. пособие / М. Г. Ляпунова. – Благовещенск : Амур. гос. ун-т, 2000. – 43 с.

11. *Малыхин, В. И.* Математика в экономике / В. И. Малыхин. – Москва : Инфра-М, 2000. – 356 с.

12. *Пискунов, Н. С.* Дифференциальное и интегральное исчисления / Н. С. Пискунов. – Москва : Наука, 1985. – 560 с.

13. *Решетняк, Ю. Г.* Курс математического анализа / Ю. Г. Решетняк. – Новосибирск : Изд-во Института математики, 1999. – Кн. 2. – 512 с.

14. *Солодовников, А. С.* Математика в экономике / А. С. Солодовников, В. А. Бабайцев. – Москва : Финансы и статистика, 2005. – 560 с.

15. *Фихтенгольц, Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления / Г. М. Фихтенгольц. – Москва : Лана, 2020. – 800 с.

© Алтайский государственный педагогический университет, 2021